Differentialoperatoren für Skalar- und Vektorfelder

Definition 1. (Laplace-Operator):

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, wobei alle partiellen Ableitungen der Form $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $1 \leq i \leq n$ in $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ existieren. Der Laplaceoperator von f in $\vec{p}$ ist definiert als

$$\Delta f(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{p}).$$

Definition 2. (Jacobimatrix):
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld, wobei alle partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ in $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ existieren. Die Jacobimatrix von f im Punkt $\vec{p}$ ist definiert als

$$J_f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{p}) & ,\dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{p}) & ,\dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{p}) \end{pmatrix}$$

Definition 3. (Divergenz):
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, wobei alle partiellen Ableitungen der Form $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ in $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ existieren. Die Divergenz von f in $\vec{p}$ ist definiert als

$$\text{div} f(\vec{p}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{p}) \qquad (\text{formal } \nabla \cdot f).$$

Vektorfelder mit $\text{div} f(\vec{p}) = 0 \; \forall \vec{p}$ heißen quellenfrei.

Definition 4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, wobei alle partiellen Ableitungen der Form $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ in $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ existieren. Die Rotation von f in $\vec{p}$ ist definiert als

$$\text{rot} f(\vec{p}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\vec{p}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{p}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{p}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\vec{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{p}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{p}) \end{pmatrix} \qquad (\text{formal } \nabla^T \times f)$$

Vektorfelder mit $\text{rot} f(\vec{p}) = 0 \; \forall \vec{p}$ heißen wirbelfrei.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + x_3^3 \\ x_1 x_2^2 x_3 \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 & 3x_3^2 \\ x_2^2x_3 & 2x_1x_2x_3 & x_1x_2^2 \\ 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div} f(\vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_1x_3 \qquad \mathrm{rot} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 - x_1x_2^2 \\ 2x_3^2 - 3x_1^2 - x_2^2 \\ x_2^2x_3 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt stets div (rot f)$(\vec{x}) = 0$.