Lineare Algebra

Mathematik II für Chemiker

Daniel Gerth

Überblick Lineare Algebra

Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter Vektoren versteht
- Wie man einfache geometrische Sachverhalte beschreibt
- Was man unter Matrizen versteht, und wie man mit ihnen rechnet
- Was Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bedeuten
- Wie man lineare Gleichungssysteme löst

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

- geometrische Sachverhalte (Bewegung, Längen, Winkel, Abstände in 2D, 3D)
- Größen die in einem geometrischen Raum 'wirken' (z.B. Kraft F wirkt im 3-dimensionalen Raum in x- y- und z-Richtung, Geschwindigkeit v,...)
- Größen, die von mehreren Eigenschaften abhängen (zB Dichte des Gemischs mehrerer Stoffe)
- Sachverhalte, die in der mehrere Größen auf einmal beschrieben werden können/sollen

Notation

Wir betrachten allgemein den Raum $\mathbb{R}^n$ bestehend aus n reellen Zahlen. (man kann -ganz analog- den Raum $\mathbb{C}^n$ einführen). Aber starten wir mit den wichtigsten Spezialfällen:

- $n = 1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, also die uns bekannten reellen Zahlen
- $n = 2$: $\mathbb{R}^2$, geometrisch die 2-dimensionale Ebene. Es wird beschrieben mit einem 2-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $n = 3$: $\mathbb{R}^3$, geometrisch der 3-dimensionale Raum. Er wird beschrieben mit einem 3-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

x_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

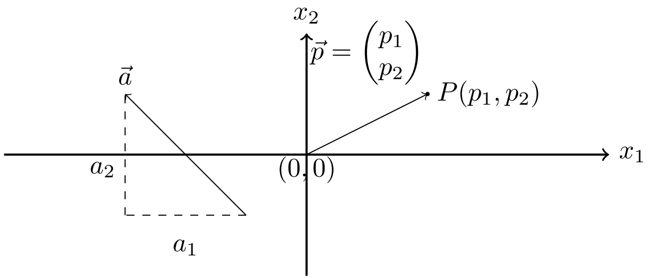
zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

x_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

Notation: im geometrischen Zusammenhang schreiben wir $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Ebenfalls üblich: $\bar{x}, \mathbf{x}, \underline{x}$
Im entsprechenden Kontext wird oft auch einfach x verwendet.

Geometrische Interpretation am Beispiel $n = 2$

Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene mit Ursprung $O = (0, 0)$ und Achsen x_1 und x_2.



Ein *Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Richtung "gehe a_1 Schritte in Richtung positiver x_1-Achse und a_2 Schritte in Richtung positiver x_2-Achse".

Jeder Punkt $P = (p_1, p_2)$ in $\mathbb{R}^2$ wird charakterisiert durch einen Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, der am Ursprung angesetzt wird. $\vec{p}$ heisst dann *Ortsvektor* zu P.

(analog für beliebiges n)

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren: $\lambda \vec{x} = ?$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren: $\lambda \vec{x} = ?$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel, $n = 2$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$, $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.75 \end{pmatrix}$

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

a) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
e) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
f) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
g) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

a) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

e) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

f) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

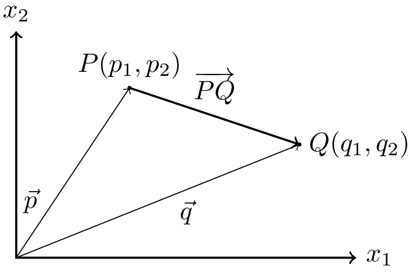
g) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Definition 1.1

Eine Menge V mit Addition $+$ und skalarer Multiplikation $\cdot$, so dass mit $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ [$\lambda \in \mathbb{C}$] auch $a + b \in V$, $\lambda \cdot a \in V$ und bezüglich $+, \cdot$ die Eigenschaften a)-g) gelten, heißt **Vektorraum über** $\mathbb{R}$ *[über $\mathbb{C}$]*

Hinweis: wir werden uns im Folgenden auf reelle Vektorräume beschränken

Beachten Sie immer den Unterschied zwischen Punkt und Vektor! Ein Punkt ist fest durch Koordinatenursprung und Koordinaten (Ortsvektor) bestimmt. Ein Vektor beschreibt nur eine Richtung und kann an jedem Punkt angesetzt werden. Wie kommt man nun von einem Punkt zum anderen?



Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte im $\mathbb{R}^n$. Der Vektor

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$ beschreibt die Richtung von Punkt P zu Punkt Q.

Es gilt $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ}$, wobei $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die Ortsvektoren zu P und Q sind.

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

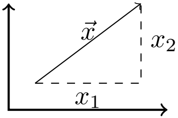
Definition 1.2

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** *auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $||x|| \geq 0$
- $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = \lambda ||x||$
- $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

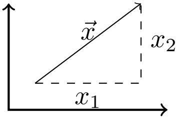
$(V, ||\cdot||)$ *heißt* **normierter Raum***.*

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

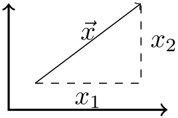
Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:

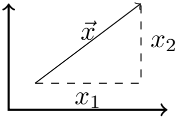


Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Definition 1.3

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$*. Dann ist* $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$ *die* **euklidische Norm***. Man nennt sie auch* **Länge** *oder* **Betrag** *des Vektors und schreibt* $|\vec{x}|$ *statt* $||\vec{x}||_2$.

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Definition 1.3

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$ die **euklidische Norm**. *Man nennt sie auch* **Länge** *oder* **Betrag** *des Vektors und schreibt $|\vec{x}|$ statt $||\vec{x}||_2$.*

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann $||\vec{x}||_2 = |\vec{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{59} \approx 7.68$

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor***. Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$*. Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$*.*

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Der **Abstand** zwischen P und Q ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Der **Abstand** zwischen P und Q ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

Beispiel

$$P = (1, -2, 3),\ Q = (-1, -2, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x\rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Theorem 1

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V, $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Theorem 1

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V, $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.

Theorem 2

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit Norm $||x|| := \sqrt{\langle x, x, \rangle}$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\forall x, y \in V : |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

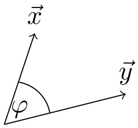
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Beispiel

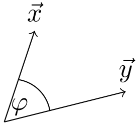
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Dann $||\vec{x}||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots, x_n^2}$, also gerade die Länge des Vektors $\vec{x}$. Mit anderen Worten: $||\vec{x}||_2^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$.



Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$



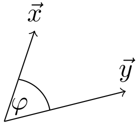
Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so stehen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht aufeinander.

Definition 1.7

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, so nennen wir $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **orthogonal** *zueinander. Gilt zusätzlich $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = 1$, so nennen wir sie* **orthonormal**.



Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$

Ist $\varphi = 90°$, so stehen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht aufeinander.

Definition 1.7

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, so nennen wir $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **orthogonal** *zueinander. Gilt zusätzlich $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = 1$, so nennen wir sie* **orthonormal**.

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann $||\vec{x}|| = \sqrt{6}$, $||\vec{y}|| = \sqrt{10}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4$. Also $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} \approx 0.51$, also $\varphi = 58.9°$.

Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

Definition 1.8

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Das **Kreuzprodukt** *(auch Vektorprodukt genannt) ist definiert wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

Definition 1.8

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Das **Kreuzprodukt** *(auch Vektorprodukt genannt) ist definiert wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 4 - (-2)\cdot 3 \\ 3\cdot 2 - 0.5\cdot 4 \\ 0.5\cdot(-2) - 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzprodukts

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

- Sei $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Dann ist $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem
- $||\vec{c}||$ dentspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Achtung: es gilt **nicht** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Linearkombination

Definition 1.9

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$. *Ein Vektor* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Linearkombination** *der Vektoren* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ *falls es* k *reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *gib so dass*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i}.$$

Linearkombination

Definition 1.9

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ k *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Ein Vektor* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Linearkombination** *der Vektoren* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ *falls es* k *reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *gib so dass*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i}.$$

Beispiel

Sei $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ denn $\vec{u} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$

Definition 1.10

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Definition 1.10

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Wir nennen* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Theorem 3

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. *Der Raum* $\mathbb{R}^n$ *ghat die Dimension* n.

Definition 1.10

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Theorem 3

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. *Der Raum $\mathbb{R}^n$ ghat die Dimension n.*

Definition 1.11

Eine Menge n linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ heißt **Basis**.

Geraden und Ebenen

folgt

Matrizen

folgt

Lineare Gleichungssysteme

folgt

Determinante, Eigenwerte, Eigenvektoren

folgt