Lineare Algebra

Mathematatik II für Chemiker

Daniel Gerth

Überblick Lineare Algebra

Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter Vektoren versteht
- Wie man einfache geometrische Sachverhalte beschreibt
- Was man unter Matrizen versteht, und wie man mit ihnen rechnet
- Was Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bedeuten
- Wie man lineare Gleichungssysteme löst

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

- geometrische Sachverhalte (Bewegung, Längen, Winkel, Abstände in 2D, 3D)
- Größen die in einem geometrischen Raum 'wirken' (z.B. Kraft F wirkt im 3-dimensionalen Raum in x- y- und z-Richtung, Geschwindigkeit v,...)
- Größen, die von mehreren Eigenschaften abhängen (zB Dichte des Gemischs mehrerer Stoffe)
- Sachverhalte, die in der mehrere Größen auf einmal beschrieben werden können/sollen

Notation

Wir betrachten allgemein den Raum $\mathbb{R}^n$ bestehend aus n reellen Zahlen. (man kann -ganz analog- den Raum $\mathbb{C}^n$ einführen). Aber starten wir mit den wichtigsten Spezialfällen:

- $n = 1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, also die uns bekannten reellen Zahlen
- $n = 2$: $\mathbb{R}^2$, geometrisch die 2-dimensionale Ebene. Es wird beschrieben mit einem 2-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $n = 3$: $\mathbb{R}^3$, geometrisch der 3-dimensionale Raum. Er wird beschrieben mit einem 3-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

x_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

allgemein

$\mathbb{R}^n$ als n-Tupel (Vektor) reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

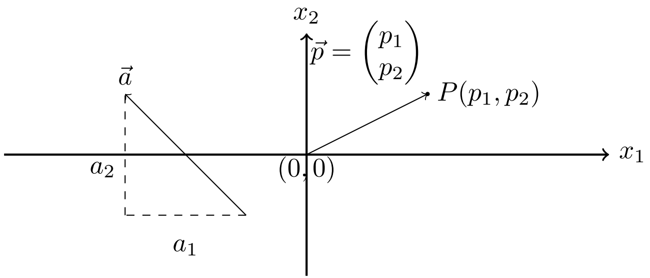
zur besseren Übersicht schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$, dabei bezeichnet $()^T$ den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

x_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

Notation: im geometrischen Zusammenhang schreiben wir $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Ebenfalls üblich: $\bar{x}, \mathbf{x}, \underline{x}$
Im entsprechenden Kontext wird oft auch einfach x verwendet.

Geometrische Interpretation am Beispiel $n = 2$

Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene mit Ursprung $O = (0, 0)$ und Achsen x_1 und x_2.



Ein *Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Richtung "gehe a_1 Schritte in Richtung positiver x_1-Achse und a_2 Schritte in Richtung positiver x_2-Achse".
Jeder Punkt $P = (p_1, p_2)$ in $\mathbb{R}^2$ wird charakterisiert durch einen Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, der am Ursprung angesetzt wird. $\vec{p}$ heisst dann *Ortsvektor* zu P.
(analog für beliebiges n)

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren: $\lambda\vec{x} = ?$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren: $\vec{a} + \vec{b} = ?$, dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren: $\lambda\vec{x} = ?$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel, $n = 2$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$, $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.75 \end{pmatrix}$

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

a) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
e) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
f) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
g) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Vektorraum-Eigenschaften

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir $-\vec{a}$ für $(-1) \cdot \vec{a}$. Den Vektor $(0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz $\vec{0}$. Damit gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

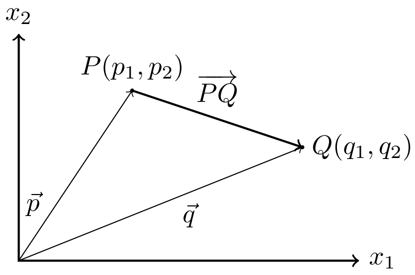
a) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
e) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
f) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
g) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Definition 1.1

Eine Menge V mit Addition $+$ und skalarer Multiplikation $\cdot$, so dass mit $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ [$\lambda \in \mathbb{C}$] auch $a + b \in V$, $\lambda \cdot a \in V$ und bezüglich $+, \cdot$ die Eigenschaften a)-g) gelten, heißt **Vektorraum über** $\mathbb{R}$ *[über $\mathbb{C}$]*

Hinweis: wir werden uns im Folgenden auf reelle Vektorräume beschränken

Beachten Sie immer den Unterschied zwischen Punkt und Vektor! Ein Punkt ist fest durch Koordinatenursprung und Koordinaten (Ortsvektor) bestimmt. Ein Vektor beschreibt nur eine Richtung und kann an jedem Punkt angesetzt werden. Wie kommt man nun von einem Punkt zum anderen?



Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte im $\mathbb{R}^n$. Der Vektor

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$ beschreibt die Richtung von Punkt P zu Punkt Q.

Es gilt $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ}$, wobei $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die Ortsvektoren zu P und Q sind.

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

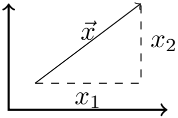
Definition 1.2

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** *auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad ||x|| \geq 0$
- $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = \lambda ||x||$
- $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

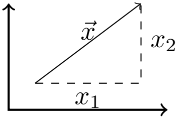
$(V, ||\cdot||)$ *heißt* **normierter Raum***.*

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

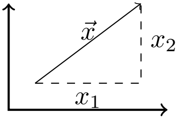
Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:

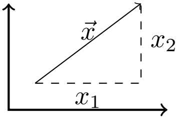


Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Definition 1.3

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$ die **euklidische Norm**. *Man nennt sie auch* **Länge** *oder* **Betrag** *des Vektors und schreibt $|\vec{x}|$ statt $||\vec{x}||_2$.*

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Sein nun $n = 3$. Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Definition 1.3

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$ die **euklidische Norm**. *Man nennt sie auch* **Länge** *oder* **Betrag** *des Vektors und schreibt $|\vec{x}|$ statt $||\vec{x}||_2$.*

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann $||\vec{x}||_2 = |\vec{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{59} \approx 7.68$

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor***. Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$*. Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$*.*

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Der **Abstand** zwischen P und Q ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

Der Betrag eines Vektors erüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. *Sei* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T$. *Der Vektor* $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ *heißt Einheitsvektor in Richtung* $\vec{x}$.

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Der **Abstand** zwischen P und Q ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

Beispiel

$$P = (1, -2, 3),\ Q = (-1, -2, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Theorem 1

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V, $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Definition 1.5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** *(inneres Produkt) auf V, falls folgende Bedingungen gelten:*

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *heißt* **euklidischer Vektorraum**.

Theorem 1

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V, $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ ein normierter Raum.

Theorem 2

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit Norm $||x|| := \sqrt{\langle x, x, \rangle}$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\forall x, y \in V : |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$

Definition 1.6

Seien $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das (euklidische) Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *is definiert als*

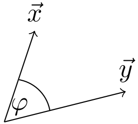
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ anstatt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Beispiel

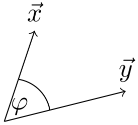
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Dann $||\vec{x}||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots, x_n^2}$, also gerade die Länge des Vektors $\vec{x}$. Mit anderen Worten: $||\vec{x}||_2^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$.



Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$



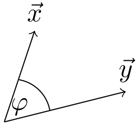
Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so stehen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht aufeinander.

Definition 1.7

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, so nennen wir $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **orthogonal** *zueinander. Gilt zusätzlich $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = 1$, so nennen wir sie* **orthonormal**.



Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}$$

Ist $\varphi = 90°$, so stehen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht aufeinander.

Definition 1.7

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, so nennen wir $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **orthogonal** *zueinander. Gilt zusätzlich $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = 1$, so nennen wir sie* **orthonormal**.

Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann $||\vec{x}|| = \sqrt{6}$, $||\vec{y}|| = \sqrt{10}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4$. Also $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} \approx 0.51$, also $\varphi = 58.9°$.

Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

Definition 1.8

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Das **Kreuzprodukt** *(auch Vektorprodukt genannt) ist definiert wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

Definition 1.8

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Das **Kreuzprodukt** *(auch Vektorprodukt genannt) ist definiert wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 0.5 \cdot 4 \\ 0.5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

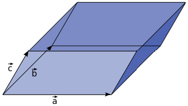
Eigenschaften des Kreuzprodukts

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

- Sei $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Dann ist $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem
- $||\vec{c}||$ dentspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Achtung: es gilt **nicht** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Spatprodukt



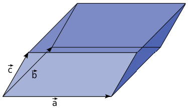
Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die ein Parallelepiped (Spat) im $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Definition 1.9

Das **Spatprodukt** *ist definiert als Kombination von Kreuz-und Skalarprodukt:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt



Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die ein Parallelepiped (Spat) im $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

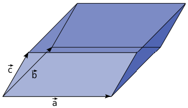
Definition 1.9

Das **Spatprodukt** *ist definiert als Kombination von Kreuz-und Skalarprodukt:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Für das Volumen V des Parallelepipeds gilt: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- weitere Eigenschaften können aus den Eigenschaften von Kreuz- und Skalarprodukt abgeleitet werden

Spatprodukt



Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, die ein Parallelepiped (Spat) im $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Definition 1.9

Das **Spatprodukt** *ist definiert als Kombination von Kreuz-und Skalarprodukt:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Für das Volumen V des Parallelepipeds gilt: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- weitere Eigenschaften können aus den Eigenschaften von Kreuz- und Skalarprodukt abgeleitet werden

Beispiel

Seien $\vec{a} = (1, -1, -2)^T$, $\vec{b} = (0, -1, 0)^T$, $\vec{c} = (1, 0, 1)^T$. Dann ist

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 1$$

Linearkombination

Definition 1.10

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ k *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Ein Vektor* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Linearkombination** *der Vektoren* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ *falls es* k *reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *gib so dass*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i}.$$

Linearkombination

Definition 1.10

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$. *Ein Vektor* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Linearkombination** *der Vektoren* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ *falls es* k *reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *gib so dass*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i}.$$

Beispiel

Sei $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ denn $\vec{u} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$

Definition 1.11

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Definition 1.11

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Beispiel 1

Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}$ wie zuvor, also $\vec{u} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$. Dann ist $\vec{u} - 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

Definition 1.11

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Beispiel 1

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{u}$ wie zuvor, also $\vec{u} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$. Dann ist $\vec{u} - 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

Beispiel 2

Seien $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Nun gilt $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} = 0$ nur, falls $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

Definition 1.11

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ k Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ **(linear) Unabhängig**, *wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v_i} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Beispiel 1

Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{u}$ wie zuvor, also $\vec{u} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2}$. Dann ist $\vec{u} - 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

Beispiel 2

Seien $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Nun gilt $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} = 0$ nur, falls $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

Untersuchung von Vektoren auf Unabhängigkeit führt i.A. auf ein lineares Gleichungssystem. Ausnahme: zwei Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ sind linear unabhängig, genau dann wenn sie **parallel** sind, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ so dass $\vec{v_1} = \lambda \vec{v_2}$

Definition 1.12

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. *Der Raum* $\mathbb{R}^n$ *hat die Dimension* n.

Definition 1.12

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. *Der Raum* $\mathbb{R}^n$ *hat die Dimension* n.

Definition 1.13

Eine Menge n *linear unabhängiger Vektoren im* $\mathbb{R}^n$ *heißt* **Basis**.

Theorem 3

Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^n$. *Dann lässt sich jeder Vektor* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \backslash \vec{0}$ *eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h. es gilt*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$$

mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$.

Wir haben bisher -und werden auch weiterhin- die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ verwenden, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben bisher -und werden auch weiterhin- die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ verwenden, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3.$$

Geraden

Wir beschränken uns nun auf den 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Wir wissen bereits, wie man einen Punkt im $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Definition 2.1

Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ wird bestimmt durch einen Punkt (mit Ortsvektor $\vec{p}$), durch den sie geht, sowie die Richtung $\vec{r}$, in die sie verläuft.

$$g := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Jeder Punkt auf der Gerade wird für ein bestimmtes λ erreicht. Sei $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Dann liegt Q auf der Geraden g genau dann wenn es ein λ_0 gibt so dass $\vec{q} = \vec{p} + \lambda_0 \vec{r}$.

Beispiel

Sei $P = (1, -2, 3)^T$, $Q = (3, 2, -1)^T$. Die Gerade durch die Punkte P und Q ist gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $A(3, 2, -1)$ liegt (mit $\lambda = 1$) auf g, der Punkt $B = (3, -1, -1)$ jedoch nicht.

Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind sehr ähnlich. Es ergibt sich die **Parameterform**

Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind sehr ähnlich. Es ergibt sich die **Parameterform**

Definition 2.2

Ein Ebene im $\mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{p}$ der Ortsvektor zum Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ ist, $\vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind sehr ähnlich. Es ergibt sich die **Parameterform**

Definition 2.2

Ein Ebene im $\mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{p}$ der Ortsvektor zum Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ ist, $\vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Seien P, Q und R drei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Ebene durch die Punkte gegeben durch

$$E := \vec{p} + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR}.$$

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau ein Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei $E = \vec{p} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$ und $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$. Sei $P = (p_1, p_2, p_3)^T$ ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau ein Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei $E = \vec{p} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$ und $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$. Sei $P = (p_1, p_2, p_3)^T$ ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Es ist $d := \vec{p} \cdot \vec{n}$ bekannt. Also ist

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

Dies ist die Ebenengleichung in **Koordinatenform**

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau ein Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei $E = \vec{p} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$ und $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$. Sei $P = (p_1, p_2, p_3)^T$ ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Es ist $d := \vec{p} \cdot \vec{n}$ bekannt. Also ist

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

Dies ist die Ebenengleichung in **Koordinatenform** Sei $\vec{e}_n := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ der Einheitsvektor in Richting $\vec{n}$, $d_e := \vec{p} \cdot \vec{e}_n$. Dann ist die **Hessesche Normalform** der Ebene gegeben durch

$$\vec{q} \cdot \vec{e}_n = d_e$$

Beispiel

Gegeben seien die Punkte $P = (1, 2, -1)$, $Q = (-2, 1, 1)$, $R = (5, -5, 0)$. Dann ist die durch die 3 Punkte aufgespannte Ebene in Parameterform

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in Normalenform (mit $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (13, 11, 25)^T$)

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 25 \end{pmatrix} = 0$$

und in Koordinatenform

$$13x_1 + 11x_2 + 25x_3 = 10$$

Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene

Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - identisch
  - parallel
  - schneiden sich in einem Punkt
  - windschief

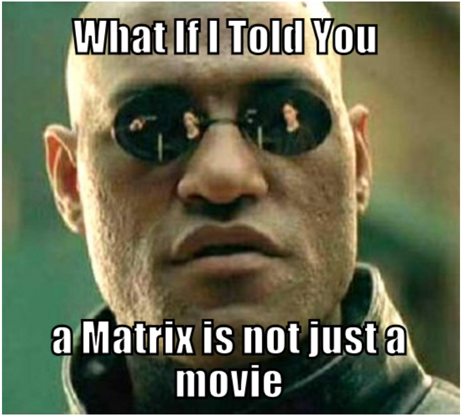
Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - identisch
  - parallel
  - schneiden sich in einem Punkt
  - windschief
- Gerade-Ebene
  - Gerade liegt in Ebene
  - parallel
  - schneiden sich in einem Punkt

Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - identisch
  - parallel
  - schneiden sich in einem Punkt
  - windschief
- Gerade-Ebene
  - Gerade liegt in Ebene
  - parallel
  - schneiden sich in einem Punkt
- Ebene-Ebene
  - parallel
  - schneiden sich in einer Gerade

Matrizen



Matrizen beschreiben lineare Operatoren auf Vektoren, sie verallgemeinern die lineare Funktion $y = ax$. Sie treten auch bei linearen Gleichungssystemen auf.

Definition 3.1

Unter einer reellen $n \times m$-**Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *versteht man die* $n \cdot m$ *Zahlen* a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots m$,*die in dem rechteckigen Schema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Wir schreiben auch kurz $A = (a_{ij})$. *Die Matrix* A *besteht aus* n **Zeilen** *und* m **Spalten**. *Die Zahlen* a_{ij} *heißen* **Matrixelemente**. *Die Elemente* $a_{i,i}$ *heißen* **Diagonalelemente**. *Eine Matrix heißt* **quadratisch** *wenn* $m = n$.

Definition 3.1

Unter einer reellen $n \times m$-**Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *versteht man die* $n \cdot m$ *Zahlen* a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots m$,*die in dem rechteckigen Schema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Wir schreiben auch kurz $A = (a_{ij})$*. Die Matrix* A *besteht aus* n **Zeilen** *und* m **Spalten***. Die Zahlen* a_{ij} *heißen* **Matrixelemente***. Die Elemente* $a_{i,i}$ *heißen* **Diagonalelemente***. Eine Matrix heißt* **quadratisch** *wenn* $m = n$*.*

Beispiel

Es sind $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Definition 3.2

Eine Matrix $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit* 1 *als Diagonalelementen und* 0 *sonst,*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Einheitsmatrix** *(manchmal auch mit* E *bezeichnet)*

Definition 3.2

Eine Matrix $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit 1 als Diagonalelementen und 0 sonst,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Einheitsmatrix** *(manchmal auch mit E bezeichnet)*

Weitere spezielle Matrizen:

- A heißt **Diagonalmatrix**: $\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \neq 0$, $\sum_{i\neq j} |a_{ij}| = 0$
- A heißt **obere Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i > j$
- A heißt **untere Dreiecksmatrix** $a_{ij} = 0$ für $i < j$

Addition von Matrizen

Definition 3.3

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *Die Summe der Matrizen* A *und* B *erhält man durch komponentenweises addieren der Einträge*

$$
\begin{aligned}
C := & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & b_{n,m-2} & b_{n,m} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2,m}+b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2}+b_{n,m-1} & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Addition von Matrizen

Definition 3.3

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *Die Summe der Matrizen* A *und* B *erhält man durch komponentenweises addieren der Einträge*

$$C := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & b_{n,m-2} & b_{n,m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2,m}+b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2}+b_{n,m-1} & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -2 \end{pmatrix},\ A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0.5 & -3 \end{pmatrix}$$

Sei 0 die **Nullmatrix**, deren Komponenten alle gleich 0 sind. Zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist $-A := (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Matrix die entsteht, wenn man das Vorzeichen aller Komponenten ändert. Dann gilt:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + 0 = 0 + A = A$
- $-A + A = A + (-A) = A - A = 0$
- $A + B = B + A$

Sei 0 die **Nullmatrix**, deren Komponenten alle gleich 0 sind. Zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist $-A := (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Matrix die entsteht, wenn man das Vorzeichen aller Komponenten ändert. Dann gilt:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + 0 = 0 + A = A$
- $-A + A = A + (-A) = A - A = 0$
- $A + B = B + A$

Man kann Matrizen auch mit Skalaren multiplizieren.

Definition 3.4

Die Multiplikation einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt eine Matrix $B = \lambda A$,

$$B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1,m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda a_{n,m-2} & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Jede Komponente von A wird mit λ multipliziert.

Sei 0 die **Nullmatrix**, deren Komponenten alle gleich 0 sind. Zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist $-A := (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Matrix die entsteht, wenn man das Vorzeichen aller Komponenten ändert. Dann gilt:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + 0 = 0 + A = A$
- $-A + A = A + (-A) = A - A = 0$
- $A + B = B + A$

Man kann Matrizen auch mit Skalaren multiplizieren.

Definition 3.4

Die Multiplikation einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt eine Matrix $B = \lambda A$,

$$B = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1,m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda a_{n,m-2} & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Jede Komponente von A wird mit λ multipliziert.

Matrizen mit dieser Addition und skalaren Multiplikation bilden einen Vektorraum

Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition 3.5

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$. *Dann ist* $Ax \in \mathbb{R}^n$,

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition 3.5

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *und* $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$*. Dann ist* $Ax \in \mathbb{R}^n$*,*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 0.5 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition 3.5

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$*. Dann ist* $Ax \in \mathbb{R}^n$*,*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m-2} & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 2 \\ 0.5\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

A hat so viele Spalten wie x Komponenten. Das Ergebnis ist ein Vektor mit so vielen Komponenten, wie A Zeilen hat. Vektoren werden **immer von rechts** mit Matrizen multipliziert.

Exkurs: lineare Abbildungen

Definition 3.6

Seien V_1, V_2 zwei Vektorräume. Jede Abbildung $\mathcal{A}$ von V_1 nach V_2 heißt genau dann **lineare Abbildung**, *wenn gilt:*

- $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \qquad \forall x, y \in V_1$
- $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x \qquad \forall x \in V_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Exkurs: lineare Abbildungen

Definition 3.6

Seien V_1, V_2 zwei Vektorräume. Jede Abbildung $\mathcal{A}$ von V_1 nach V_2 heißt genau dann **lineare Abbildung**, *wenn gilt:*

- $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \qquad \forall x, y \in V_1$
- $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x \qquad \forall x \in V_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sei $V_1 = \mathbb{R}^m$, $V_2 = \mathbb{R}^n$. Jede lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist darstellbar durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$

Exkurs: lineare Abbildungen

Definition 3.6

Seien V_1, V_2 zwei Vektorräume. Jede Abbildung $\mathcal{A}$ von V_1 nach V_2 heißt genau dann **lineare Abbildung**, *wenn gilt:*

- $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \qquad \forall x, y \in V_1$
- $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x \qquad \forall x \in V_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sei $V_1 = \mathbb{R}^m$, $V_2 = \mathbb{R}^n$. Jede lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist darstellbar durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$

Anwendungen

Beispiele für lineare Abbildungen: Koordinaten-(Basis-)transformation, Drehung, Verschiebung, Diskrete Integration, Diskretes Differenzieren,...

Matrizenmultiplikation

anders ausgedrückt ist $Ax = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j)_{i=1,\dots,n}$. x als Vektor ist eine $m \times 1$-Matrix. Dies motviert folgende Verallgemeinerung auf Matrizen:

Definition 3.7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dann ist $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

maW. das Element von C in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ist das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B.

Matrizenmultiplikation

anders ausgedrückt ist $Ax = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j)_{i=1,\dots,n}$. x als Vektor ist eine $m \times 1$-Matrix. Dies motviert folgende Verallgemeinerung auf Matrizen:

Definition 3.7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dann ist $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

maW. das Element von C in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ist das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B.

Beispiel

Sei $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Dann $A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$

ACHTUNG! Es gilt (im allgememeinen) nicht $A \cdot B = B \cdot A$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $I \cdot A = A \cdot I = A$

ACHTUNG! Es gilt (im allgememeinen) nicht $A \cdot B = B \cdot A$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 22 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 3.8

Unter der **transponierten** *Matrix versteht man die Matrix $A^T = (a_{ji})$, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt $A = A^T$ so heißt A* **symmetrisch**. *Ist $A = -A^T$, so heißt A* **schiefsymmetrisch**

Es gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

Definition 3.8

Unter der **transponierten** *Matrix versteht man die Matrix $A^T = (a_{ji})$, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt $A = A^T$ so heißt A* **symmetrisch**. *Ist $A = -A^T$, so heißt A* **schiefsymmetrisch**

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Es gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

Definition 3.8

Unter der **transponierten** *Matrix versteht man die Matrix* $A^T = (a_{ji})$*, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt* $A = A^T$ *so heißt* A **symmetrisch**. *Ist* $A = -A^T$*, so heißt* A **schiefsymmetrisch**

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Es gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

- $(A^T)^T) = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Definition 3.8

Unter der **transponierten** *Matrix versteht man die Matrix $A^T = (a_{ji})$, die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt $A = A^T$ so heißt A* **symmetrisch**. *Ist $A = -A^T$, so heißt A* **schiefsymmetrisch**

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Es gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

- $(A^T)^T) = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Dabei ist A^{-1} die **inverse matrix** zu A (falls diese existiert). Wir werden diese demnächst kennenlernen.

Inverse Matrix

Definition 3.9

Eine Matrix A heißt **regulär** *oder* **invertierbar**, *wenn es eine Matrix B gibt, so dass*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

mit der Einheitsmatrix I. B ist die **inverse Matrix** *Wir bezeichnen sie mit A^{-1}. Die Matrix A heißt dann* **regulär** *oder* **invertierbar**. *Eine Matrix, zu der es keine inverse gibt, heißt* **singulär**

Inverse Matrix

Definition 3.9

Eine Matrix A heißt **regulär** *oder* **invertierbar**, *wenn es eine Matrix B gibt, so dass*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

mit der Einheitsmatrix I. B ist die **inverse Matrix** *Wir bezeichnen sie mit A^{-1}. Die Matrix A heißt dann* **regulär** *oder* **invertierbar**. *Eine Matrix, zu der es keine inverse gibt, heißt* **singulär**

Theorem 4

Jede nicht-quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n \neq m$ ist singulär.

Inverse Matrix

Definition 3.9

Eine Matrix A heißt **regulär** *oder* **invertierbar**, *wenn es eine Matrix B gibt, so dass*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

mit der Einheitsmatrix I. B ist die **inverse Matrix** *Wir bezeichnen sie mit A^{-1}. Die Matrix A heißt dann* **regulär** *oder* **invertierbar**. *Eine Matrix, zu der es keine inverse gibt, heißt* **singulär**

Theorem 4

Jede nicht-quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n \neq m$ ist singulär.

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Definition 3.9

Eine Matrix A heißt **regulär** *oder* **invertierbar**, *wenn es eine Matrix B gibt, so dass*

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

mit der Einheitsmatrix I. B ist die **inverse Matrix** *Wir bezeichnen sie mit A^{-1}. Die Matrix A heißt dann* **regulär** *oder* **invertierbar**. *Eine Matrix, zu der es keine inverse gibt, heißt* **singulär**

Theorem 4

Jede nicht-quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n \neq m$ ist singulär.

Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Wir möchten Kriterien, die uns sagen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht.

Definition 3.10

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A heißt **Spaltenrang** *von A. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A heißt* **Zeilenrang** *von A. Es gilt stets, dass Zeilenrang und Spaltenrang identisch sind. Daher bezeichnen wir als* **Rang** *einer Matrix die maximale Anzahl linear unbhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.*

Rang einer Matrix

Wir möchten Kriterien, die uns sagen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht.

Definition 3.10

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A heißt **Spaltenrang** *von A. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A heißt* **Zeilenrang** *von A. Es gilt stets, dass Zeilenrang und Spaltenrang identisch sind. Daher bezeichnen wir als* **Rang** *einer Matrix die maximale Anzahl linear unbhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.*

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Rang 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ hat Rang 1.

Rang einer Matrix

Wir möchten Kriterien, die uns sagen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht.

Definition 3.10

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A heißt **Spaltenrang** *von A. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A heißt* **Zeilenrang** *von A. Es gilt stets, dass Zeilenrang und Spaltenrang identisch sind. Daher bezeichnen wir als* **Rang** *einer Matrix die maximale Anzahl linear unbhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.*

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Rang 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ hat Rang 1.

Theorem 5

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn sie Rang n hat.

Determinanten

Definition 3.11

Die Determinate $\det A = |A|$ *einer quadratischen Matrix* A *ist eine Funktion, die der Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eindeutig ein Skalar zuordnet. Gilt* $\det A \neq 0$*, so ist* A *invertierbar.*

Die allgemeine Definiton der Determinante ist kompliziert und unpraktisch. Wir betrachten zuerst drei Spezialfälle:

Determinanten

Definition 3.11

Die Determinate $\det A = |A|$ *einer quadratischen Matrix* A *ist eine Funktion, die der Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eindeutig ein Skalar zuordnet. Gilt* $\det A \neq 0$, *so ist* A *invertierbar.*

Die allgemeine Definiton der Determinante ist kompliziert und unpraktisch. Wir betrachten zuerst drei Spezialfälle:

- $n = 1$: $\det A = \det a_{11} = a_{11}$
- $n = 2$: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- $n = 3$: mit *Regel von Sarrus*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Man kann Determinaten rekursiv berechnen.

Definition 3.12

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *und* A_{ij}*, die Matrix, die entsteht, wenn man in* A *die* i*-te zeile und* j*-te Spalte streicht. Dann heißt* $\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ **algebraisches Komplement** *zum Element* a_{ij}*.*

Man kann Determinaten rekursiv berechnen.

Definition 3.12

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A_{ij}, die Matrix, die entsteht, wenn man in A die i-te zeile und j-te Spalte streicht. Dann heißt $\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ **algebraisches Komplement** *zum Element a_{ij}.*

Theorem 6

Sei j eine beliebige Spalte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\det A = |A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj}$$

analog, sei i eine beliebige Zeile von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\det A = |A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}$$

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Wir entwickeln $\det A$ nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det A =& 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
& + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{dies entwickeln wir nach der 2. Zeile} \\
& = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
& = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)) = 12
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des algebraischen Komplements kann man zu gegebener regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die inverse Matrix berechnen. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des algebraischen Komplements kann man zu gegebener regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die inverse Matrix berechnen. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Inverse einer 2×2 Matrix

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Mit Hilfe des algebraischen Komplements kann man zu gegebener regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die inverse Matrix berechnen. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Inverse einer 2×2 Matrix

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Wir werden noch eine einfachere Möglichkeit zur Berechnung der inversen Matrix kennenlernen. Aber werfen wir erst einen Blick auf Eigenschaften der Determinante.

Theorem 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Dann ist* A *invertierbar (regulär), genau dann, wenn* $\det A \neq 0$

Theorem 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Dann ist* A *invertierbar (regulär), genau dann, wenn* $\det A \neq 0$

Theorem 8

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix. Dann ist die Determinante von* A *gleich dem Produkt der Diagonaleinträge*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

Theorem 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar (regulär), genau dann, wenn $\det A \neq 0$

Theorem 8

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix. Dann ist die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

Theorem 9

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det A = \det A^T$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ *falls A invertierbar ist*

Theorem 10

Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ n Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante $|\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n|$ mitden $\vec{v}_i$ als Spalten ungleich Null ist.

Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Dann gilt für die Determinante $\det A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|$

- ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \lambda \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n| = \lambda |\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n|$$

Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Dann gilt für die Determinante $\det A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|$

- ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \lambda \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n| = \lambda |\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n|$$

- Bei Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_k \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n| = -|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_k \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_i \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n|$$

Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Dann gilt für die Determinante $\det A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|$

- ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \lambda \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n| = \lambda |\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n|$$

- Bei Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_k \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n| = -|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_k \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_i \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n|$$

- hat eine Matrix 2 gleiche (parallele) Spalten, so gilt $\det A = 0$

Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$. Dann gilt für die Determinante $\det\ A = |\vec{a}_1\vec{a}_2\dots\vec{a}_n|$

- ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

$$|\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}\lambda\vec{a}_i\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_n| = \lambda|\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}\vec{a}_i\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_n|$$

- Bei Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$|\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}\vec{a}_i\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_{k-1}\vec{a}_k\vec{a}_{k+1}\dots\vec{a}_n| = -|\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}\vec{a}_k\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_{k-1}\vec{a}_i\vec{a}_{k+1}\dots\vec{a}_n|$$

- hat eine Matrix 2 gleiche (parallele) Spalten, so gilt $\det\ A = 0$
- der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein vielfaches einer anderen Spalte addiert:

$$|\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}\vec{a}_i\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_n| = |\vec{a}_1\dots\vec{a}_{i-1}(\vec{a}_i + \lambda\vec{a}_k)\vec{a}_{i+1}\dots\vec{a}_n|$$

Rechenregeln für Determinanten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Dann gilt für die Determinante $\det A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|$

- ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \lambda \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n| = \lambda |\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n|$$

- Bei Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_k \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n| = -|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_k \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_{k-1} \vec{a}_i \vec{a}_{k+1} \ldots \vec{a}_n|$$

- hat eine Matrix 2 gleiche (parallele) Spalten, so gilt $\det A = 0$
- der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein vielfaches einer anderen Spalte addiert:

$$|\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n| = |\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1} (\vec{a}_i + \lambda \vec{a}_k) \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n|$$

Die gleichen Regeln gelten auch für Zeilen anstatt Spalten!

Anwendung: man kann mit diesen Eigenschaften eine Determinante so umformen, dass man das Ergebnis leicht berechnen kann. Man überführt dabei eine beliebige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

in die Form

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix},$$

also in die Form einer oberen Dreiecksmatrix. Die Determinante ist dann gleich dem Produkt der Diagonalelemente, siehe Satz 8.

Man addiert geschickt vielfache der Zeilen untereinander. Dies wird am besten in einem Beispiel deutlich:

Beispiel

Es ist (mit Z für "Zeile")

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{2.\text{Z}=2.\text{Z}-2*1.\text{Z}}{=} (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 8/3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-3) \cdot \frac{8}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{3.\text{Z}=3.\text{Z}-2.\text{Z}}{=} (-3) \cdot \frac{8}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 11/8 \end{vmatrix} \\
&= (-3) \cdot \frac{8}{3} \cdot [1 \cdot 1 \cdot \frac{11}{8}] = -11
\end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.1

Unter einem **linearen Gleichungssystem (LGS)** *verstehen wir ein ein System aus* m *Gleichungen derselben* n *unbekannten Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1_n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2_n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m_n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

fasst man $x_1, \ldots, x_n$ zum **Lösungsvektor** x, die Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ zu einem Vektor b und die Zahlen a_{ik} zu einer **Koeffizientenmatrix** A zusammen, kann man das Gleichungssystem in Matrixform schreiben:

$$Ax = b$$

Lineare Gleichungssysteme gehören zu den häufigsten Problemen in der Mathematik, auch wir haben sie bereits früher angetroffen.

Ausgeschrieben ergibt sich $Ax = b$ zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt sich $Ax = b$ zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 4.2

Ist die rechte seite b gleich Null, also $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**. *Anderenfalls heißt es* **inhomogen**.

Ausgeschrieben ergibt sich $Ax = b$ zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 4.2

Ist die rechte seite b gleich Null, also $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**. *Anderenfalls heißt es* **inhomogen**.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen das Gleichungungssystem lösbar ist (also mindestens einen Lösungsvektor x besitzt). Sei dazu

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

Ausgeschrieben ergibt sich $Ax = b$ zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definition 4.2

Ist die rechte seite b gleich Null, also $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**. *Anderenfalls heißt es* **inhomogen**.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen das Gleichungungssystem lösbar ist (also mindestens einen Lösungsvektor x besitzt). Sei dazu

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix**. Sei $\operatorname{rang}(A) = r$, $\operatorname{rang}((A|b)) = R$. Damit kann man Aussagen zur Lösbarkeit treffen:

Theorem 11

Notwendig und hinreichend dafür, dass das LGS Lösungen besitzt, ist das $r = R$ *ist. Gilt ausserdem* $r = n$*, so ist die Lösung eindeutig. Ist dagegen* $n > r$*, so kann man die Werte für* $n - r$ *Unbekannte beliebig vorgeben und die restlichen* r *Unbekannten ergeben sich.*

Theorem 11

Notwendig und hinreichend dafür, dass das LGS Lösungen besitzt, ist das $r = R$ ist. Gilt ausserdem $r = n$, so ist die Lösung eindeutig. Ist dagegen $n > r$, so kann man die Werte für $n - r$ Unbekannte beliebig vorgeben und die restlichen r Unbekannten ergeben sich.

Wir betrachten nun den Fall $m = n$, d.h. es gibt gleich viele Gleichungen und Unbekannte.

Theorem 12

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- *A ist invertierbar*
- $\det A \neq 0$
- *das LGS $Ax = b$ hat für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung*
- *das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$*
- *Die Matrix hat vollen Rang $\operatorname{rang}(A) = n$*

Berechnung der Lösung

Wir betrachten das LGs $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\det A \neq 0$, ist A also invertierbar, so ergibt sich

$$x = A^{-1}b,$$

denn $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b$. Die Berechung der inversen Matrix ist jedoch - wie bereits erwähnt - meist zu kostspielig. Stattdessen nutzen wir folgenden Satz:

Berechnung der Lösung

Wir betrachten das LGs $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\det A \neq 0$, ist A also invertierbar, so ergibt sich

$$x = A^{-1}b,$$

denn $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b$. Die Berechung der inversen Matrix ist jedoch - wie bereits erwähnt - meist zu kostspielig. Stattdessen nutzen wir folgenden Satz:

Theorem 13

Die folgenden drei **elementaren Zeilenumformungen** *an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des LGS $Ax = b$ ändern die Lösungsmenge des LGS nicht:*

- *die Vertauschung zweier Zeilen*
- *die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$*
- *die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*

Berechnung der Lösung

Wir betrachten das LGs $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Gilt $\det A \neq 0$, ist A also invertierbar, so ergibt sich

$$x = A^{-1}b,$$

denn $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b$. Die Berechung der inversen Matrix ist jedoch - wie bereits erwähnt - meist zu kostspielig. Stattdessen nutzen wir folgenden Satz:

Theorem 13

Die folgenden drei **elementaren Zeilenumformungen** *an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des LGS $Ax = b$ ändern die Lösungsmenge des LGS nicht:*

- *die Vertauschung zweier Zeilen*
- *die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$*
- *die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*

Damit können wir ein Gleichungssystem umformen:

Gaußches Eliminationsverfahren

Gegeben sei ein LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Man kann dann die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Dreiecksform umformen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

wird umgeformt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{32} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

Gaußches Eliminationsverfahren

Gegeben sei ein LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Man kann dann die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Dreiecksform umformen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

wird umgeformt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{32} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

In dieser Form kann die Lösung leicht von unten nach oben berechnet werden: $x_n = \tilde{b}_n$, $x_{n-1} = \tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n} \cdot x_n$ usw. Wir betrachten einfach ein Beispiel:

Beispiel

Sei $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $(A|b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Damit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{3.Z=3.Z-1.Z}{\overset{2.Z=2.Z+2*1.Z}{=}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3.Z=2*3.Z+3*2.Z}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Sei $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $(A|b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Damit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{3.Z=3.Z-1.Z}{\overset{2.Z=2.Z+2*1.Z}{=}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3.Z=2*3.Z+3*2.Z}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 3 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &= 9 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17 \cdot x_3 &= 17 \end{aligned}$$

und man erhält $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Im vorigen Beispiel war $\det A \neq 0$, das LGS hatte also eine eindeutige Lösung. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren kann man auch Lösungen von LGS berechnen, in denen $\det A = 0$ gilt oder sie Zahl der Gleichungen nicht mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt:

Im vorigen Beispiel war $\det A \neq 0$, das LGS hatte also eine eindeutige Lösung. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren kann man auch Lösungen von LGS berechnen, in denen $\det A = 0$ gilt oder sie Zahl der Gleichungen nicht mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt:

- besteht eine Zeile nur aus 0, kann eine beliebige Unbekannte beliebig gewählt werden
- pro 0-Zeile ergibt sich so eine frei wählbare Unbekannte.

Im vorigen Beispiel war $\det A \neq 0$, das LGS hatte also eine eindeutige Lösung. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren kann man auch Lösungen von LGS berechnen, in denen $\det A = 0$ gilt oder sie Zahl der Gleichungen nicht mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt:

- besteht eine Zeile nur aus 0, kann eine beliebige Unbekannte beliebig gewählt werden
- pro 0-Zeile ergibt sich so eine frei wählbare Unbekannte.
- sind in einer Zeile nur 0 Einträge ausser dem ganz rechten, so hat das LGS keine Lösung.

Im vorigen Beispiel war $\det A \neq 0$, das LGS hatte also eine eindeutige Lösung. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren kann man auch Lösungen von LGS berechnen, in denen $\det A = 0$ gilt oder sie Zahl der Gleichungen nicht mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt:

- besteht eine Zeile nur aus 0, kann eine beliebige Unbekannte beliebig gewählt werden
- pro 0-Zeile ergibt sich so eine frei wählbare Unbekannte.
- sind in einer Zeile nur 0 Einträge ausser dem ganz rechten, so hat das LGS keine Lösung.

Beispiel

Sei, nach Umformung

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann können wir eine Unbekannte, sagen wir x_3, frei wählen. Dann ist $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{1}{2}(1-3t)$ und $x_1 = \frac{1}{3}(7.5 - 8.5t)$. Die Gleichung hat also unendlich viele Lösungen

Berechnung der inversen Matrix

Mit demselben Algorithmus kann man auch die inverse einer Matrix berechnen. Sei dazu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Wir schreiben die Matrix, die Entsteht, wenn man nach A noch eine Einheitsmatrix anhängt (anstelle des Vektors b im vorherigen Fall):

$$(A|I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dies formen wir um bis die EInheitsmatrix auf der linken Seite statt A steht, also

$$(I|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $B = (b_{ij})$ ist dann gerade die zu A inverse Matrix

Beispiel

Sei $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir berechnen die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (I|A^{-1})$$

Cramersche Regel

Wir lernen noch eine weitere Möglichkeit kennen, lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Theorem 14

Cramersche Regel Gegeben sei das LGS $Ax = b$ *mit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$ *und* $b \in \mathbb{R}^n$*. Es sein* $A_i^b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Matrix, die entsteht, wenn man die* i*-te Spalte von* A *durch* b *ersetzt. Dann gilt für* $1 \leq i \leq n$*:*

$$x_i = \frac{\det(A_i^b)}{\det(A)}$$

Cramersche Regel

Wir lernen noch eine weitere Möglichkeit kennen, lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Theorem 14

Cramersche Regel Gegeben sei das LGS $Ax = b$ *mit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$ *und* $b \in \mathbb{R}^n$. *Es sein* $A_i^b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Matrix, die entsteht, wenn man die* i*-te Spalte von* A *durch* b *ersetzt. Dann gilt für* $1 \leq i \leq n$*:*

$$x_i = \frac{\det(A_i^b)}{\det(A)}$$

Man kann damit also insbesondere einzelne Lösungskomponenten berechnen. Für größere n ist die Cramersche Regel meist zu aufwändig.

Beispiel

Gegeben sei $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{13}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{7}{13}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{13}$$

Diskussion der Lösungsmengen

Wir beginnen mit den Lösungen homogener LGS:

Theorem 15

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Sei* $r = \operatorname{rang}(A)$*. Die Lösungsvektoren des homogenen LGS* $Ax = 0$ *bilden einen Vektorraum der Dimension* $n - r$*. Ist* $r = n$*, also* A *invertierbar, so ist das LGS nur durch* $x = 0$ *lösbar.*

Diskussion der Lösungsmengen

Wir beginnen mit den Lösungen homogener LGS:

Theorem 15

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Sei* $r = \operatorname{rang}(A)$*. Die Lösungsvektoren des homogenen LGS* $Ax = 0$ *bilden einen Vektorraum der Dimension* $n - r$*. Ist* $r = n$*, also* A *invertierbar, so ist das LGS nur durch* $x = 0$ *lösbar.*

Es gibt also $n-$ linear unabhängige Lösungsvektoren. Sei $\vec{x}_1$ ein solcher Lösingsvektor. Dann ist auch $\lambda \vec{x}_1$ Lösungsvektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\vec{x}_2$ ein weiterer LV, so ist auch $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ ein LV.

Diskussion der Lösungsmengen

Wir beginnen mit den Lösungen homogener LGS:

Theorem 15

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sei $r = \operatorname{rang}(A)$. Die Lösungsvektoren des homogenen LGS $Ax = 0$ bilden einen Vektorraum der Dimension $n - r$. Ist $r = n$, also A invertierbar, so ist das LGS nur durch $x = 0$ lösbar.

Es gibt also $n-$ linear unabhängige Lösungsvektoren. Sei $\vec{x}_1$ ein solcher Lösingsvektor. Dann ist auch $\lambda\vec{x}_1$ Lösungsvektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\vec{x}_2$ ein weiterer LV, so ist auch $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ ein LV.

Theorem 16

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Die Menge aller Lösungen des LGS $Ax = b$ setzt sich zusammen aus einer beliebigen Lösung des LGS $Ax = b$ und allen Linearkombinationen des homogenen LGS $Ax = 0$.

Beispiel

Gegeben sei das LGS $Ax = b$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$. Das LGS ist lösbar, denn $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A)$. Es ist $\operatorname{rang}(A) = 2$, also gibt es $n - r = 3 - 2 = 1$ lin. unabhängigen LV des homogenen Systems. Betrachten wir das homogene LGS $Ax = 0$. Nach Zeilenumformungen erhält man die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

x_3 ist also freier Parameter. Als Lösungsvektor erhält man $\vec{x}_{hom} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist $\vec{x}_{inhom} = \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Beste approximative Lösung

Wir haben bereits gelernt, dass nicht alle linearen Gleichungssysteme lösbar sind, insbesondere wenn es mehr Gleichungen als unbekannte Variablen gibt. Man kann jedoch eine Lösung finden, die den kleinsten Anstand zu den gegebenen Daten hat:

Theorem 17

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. *Die bestmögliche Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate ist definiert als*

$$x^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2^2 = \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} |A\vec{x} - \vec{b}|$$

Dabei ist x^* *berechenbar als Lösung der Normalengleichung*

$$A^T Ax = A^T b.$$

Eigenwerte, Eigenvektoren

Definition 5.1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *heißt* **Eigenwert** *von* A*, falls es ein* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $x \neq 0$ *gibt so dass*

$$Ax = \lambda x$$

Dieses x *heißt dann* **Eigenvektor** *zum Eigenwert* λ*. Die Menge*

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$$

heißt **Eigenraum** *zum Eigenwert* λ*. Speziell heißt* E_0 *der Nullraum von* A*. Er wird oft auch mit* $\mathcal{N}(A)$ *bezeichnet. Die Menge*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \textit{ist Eigenwert von } A\}$$

heißt **Spektrum** *von* A*.*

Theorem 18

λ ist Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Theorem 18

λ ist Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Diese Determinante ist ein Polynom n-ten Grades und heißt **charakteristisches Polynom** von A. Um die Eigenvektoren zu bestimmen, muss für jeden Eigenwert λ das homogene LGS

$$(A - \lambda I)x = 0$$

gelöst werden.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir lösen $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Berechnen wir nun die Eigenvektoren, zuerst zu $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $x_1 = x_2$. Der Vektor $\vec{x}^1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist damit Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Analog erhält man $\vec{x}^2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

Theorem 19

Sei λ eine k-fache Nullstelle des charackteristischen Polynoms einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt für die Dimension s des zu λ gehörenden Eigenraumes E_λ: $1 \leq s \leq k$, es gibt also mindestens einen und maximal k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ

Theorem 19

Sei λ eine k-fache Nullstelle des charackteristischen Polynoms einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt für die Dimension s des zu λ gehörenden Eigenraumes E_λ: $1 \le s \le k$, es gibt also mindestens einen und maximal k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ

Theorem 20

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, also $A = A^T$. Dann gilt

- *Alle Eigenwerte λ_i sind reell*
- *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal*
- *Die Dimension s_i des Eigenraumes λ_i ist gleich der Vielfachheit des Eigenwertes λ_i*
- $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^n E_{\lambda_i}$

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- Wissen was Vektoren sind
- einfache geometrische Zusammenhänge berechnen können
- mit Matrizen rechnen können
- Determinanten berechnen können
- Lineare Gleichungssysteme lösen und Aussagen über deren Lösbarkeit treffen können
- Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen können

Sie sind sich nicht sicher oder meinen "nein"? Dann werden Sie aktiv!