Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

Daniel Gerth

Überblick Differentialgleichungen

Dieses Kapitel erklärt:

- Welche Kategorien von Differentialgleichungen man unterscheidet;
- Wie man aus beobachteten naturwissenschaftlichen Vorgängen Differentialgleichungen gewinnt;
- Kriterien, um die eindeutige Existenz der Lösung eines Anfangswertproblems feststellen zu können;
- Verschiedene Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, abhängig vom vorliegenden Typ.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. Motivation

"Viele Vorgänge innerhalb der Naturwissenschaften werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Diese stellen einen *Zusammenhang her zwischen einer Größe und der Änderung derselben.* Wir stellen die grundlegenden Begriffe vor und bereiten den theoretischen Boden für die praktische Lösung von Differentialgleichungen, die in der Praxis oft auftreten".

Wenn Sie eine Pendeluhr betrachten, wenn wir von Satelliten hören, die die Erde umkreisen, Konzentrationen in *chemischen Verbindungen oder poröses Material betrachten*, stets sind es Differentialgleichungen, die zur Modellbildung herangezogen werden können.

Einleitung. Motivation

"Viele Vorgänge innerhalb der Naturwissenschaften werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Diese stellen einen *Zusammenhang her zwischen einer Größe und der Änderung derselben.* Wir stellen die grundlegenden Begriffe vor und bereiten den theoretischen Boden für die praktische Lösung von Differentialgleichungen, die in der Praxis oft auftreten".

Wenn Sie eine Pendeluhr betrachten, wenn wir von Satelliten hören, die die Erde umkreisen, Konzentrationen in *chemischen Verbindungen oder poröses Material betrachten*, stets sind es Differentialgleichungen, die zur Modellbildung herangezogen werden können.

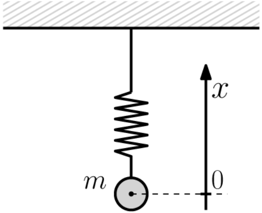
Grob gesprochen handelt es sich um Gleichungen, die Funktionen mit ihren Ableitungen verknüpfen. Entsprechend sind die *Lösungen von Differentialgleichungen wieder Funktionen.*

Man unterscheidet je nach Anzahl der Variablen in der gesuchten Funktion gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen.

Wir beschäftigen uns nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt.

Einführendes Beispiel

Wir analysieren die Bewegung eines "Federschwingers":



Die Bewegung erfolge nur in $x-$Richtung. Der Nullpunkt der $x-$Achse sei durch die Ruhelage der Masse m festgelegt. Durch diese Wahl des Nullpunkts wird u. a. der Einfluss der Schwerkraft implizit berücksichtigt.

Die Bewegung der Masse im Zeitverlauf wird in erster Linie durch das Newtonsche Gesetz der Bewegung ("Kraft = Masse · Beschleunigung") bestimmt:

$$F = mx''(t).$$

Als Kraft ist die (rücktreibende) Federkraft $F = -kx(t)$ anzusetzen (k ist eine Federkonstante). Insgesamt ergibt sich die Differentialgleichung

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{1}$$

Leicht erkennt man, dass jede Funktion der Form

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Wir werden später sehen, dass sogar jede Lösung von (1) von dieser Bauart ist.

In der Realität werden wir aber immer *genau einen Bewegungsablauf* beobachten. Diese eindeutige Lösung der Differentialgleichung erhalten wir durch das Setzen zusätzlicher Bedingungen.

Beispielsweise könnte man Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ vorgeben, z. B.

$$x(0) = 42, \quad x'(0) = 0.$$

Die zu diesen Anfangsbedingungen gehörende eindeutige Lösung lautet

$$x(t) = 42 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Es ist also ein kosinusförmiger Schwingungsverlauf zu erwarten.

Vorgehen bei der Anwendung von Differentialgleichungen

Das Beispiel des Federschwingers illustriert bereits, welche Schritte man bei der Anwendung von Differentialgleichungen i.A. zu gehen hat:

- mathematische Modellierung des naturwissenschaftlichen Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung;
- Formulierung sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen;
- *Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen;*
- Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung.

Begriffe und Klassifizierung

Definition 2.1

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n-ter Ordnung ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion $y(t)$ der einer unabhängigen Variablen t zusammen mit ihrer ersten oder höheren Ableitungen steht, also eine Gleichung der Form

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

mit einer allgemeinen Funktion $F : M \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung

heißt linear, falls Sie die Form

$$p_n(t)y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) + g(t) = 0$$

hat. Gilt dabei $g(t) = 0$, heißt die DGl homogen, sonst inhomogen. Eine $n-$mal stetig differenzierbare Funktion $y : \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (2) über dem Intervall I, wenn

$$f(t, y(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Liegt eine Differentialgleichung wie (2) in der nach der höchsten Ableitung aufgelösten Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

vor, so spricht man von einer explizierten Differentialgleichung $n-$ter Ordnung, während man bei (2) von der impliziten Form spricht.

Die Menge aller Lösungen von (2) über dem Intervall I heißt allgemeine Lösung. Ist die Differentialgleichung von $n-$ter Ordnung, beinhaltet sie i. A. n freie Parameter, die sogenannten Integrationskonstanten.

Beispiel

- Bei der Differentialgleichung

$$y'(t) = 3ty(t) + 4(y(t))^2$$

handelt es sich um eine gewöhnliche DGL in expliziter Form von erster Ordnung.

- Bei der Differentialgleichung

$$t^2 + (y''(t))^2 - e^{y(t)}y'(t) = 0$$

liegt eine gewöhnliche DGL in impliziter Form von zweiter Ordnung vor.

Um für eine Differentialgleichung $n-$ter Ordnung eine eindeutige spezielle Lösung zu bekommen, sind noch n Zusatzbedingungen nötig.

Bei Differentialgleichung erster Ordnung stellt man meist eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0$. Man nennt

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

ein Anfangswertproblem (AWP) für die DGL $y' = f(t, y)$.

Beispiel

Die Differentialgleichung zum freien Fall $y''(t) = -g$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, besitzt die allgemeine Lösung

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ ergibt sich die spezielle Lösung

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Bei Differentialgleichung zweiter Ordnung stellt man auch häufig Randbedingungen

$$y(t_0) = y_0, \qquad y(t_1) = y_1.$$

Die Punkte $t_0,\ t_1$, an denen die Funktionswerte vorgeschrieben werden, sind dabei oft die Randpunkte des Intervalls I. Man spricht von einem Randwertproblem (RWP).

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wann besitzt ein Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = f(t, \vec{y}), \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

für ein vorgegebene Anfangswerte $(t_0, \vec{y}_0)$ eine Lösung?

Satz 3.1 (Existenzsatz von Peano)

Ist die rechte Seite, also die Funktion $f(t, \vec{y})$, **stetig** *auf ihrem Definitionsbereich D, so besitzt das Anfangswertproblem für ein vorgegebene Anfangswerte (mindestens) eine Lösung.*

Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0$$

mit einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetigen rechten Seite $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$. Lösungen?

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Satz 3.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)

Sei $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablengruppe (d.h. nach* $y_1, \ldots, y_n$*) mit beschränkten partiellen Ableitungen nach diesen Variablen.*

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\vec{y}'(t) = f(t, \vec{y}), \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

eine eindeutige Lösung auf $[t_0, t_0 + a]$.

Entsprechende Aussagen ergeben sich, wenn man statt $[t_0, t_0 + a]$ *die Intervalle* $[t_0 - a, t_0]$ *bzw.* $[t_0 - a, t_0 + a]$ *verwendet.*

Beispiele

- Das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \qquad y(t_0) = y_0$$

hat nach Satz 3.2 eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, denn $f(t, y) = \lambda y$ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig, und $f_y(t, y) = \lambda$ beschränkt.

- Beim Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0$$

greift Satz 3.2 dagegen nicht, denn für $f(t, y) = \sqrt{y}$ ist $f_y(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ auf $(0, a]$ unbeschränkt und für $y = 0$ nicht definiert. Zu diesem AWP existieren tatsächlich unendlich viele Lösungen.

Bemerkungen

Oft ist in der theoretischen Literatur statt der partiellen Differenzierbarkeit mit beschränkter stetiger Ableitungen auch nur verlangt, dass die Funktion $f(t, \vec{y})$ eine so genannte lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich $\vec{y}$ erfüllt.

Darunter versteht man die Eigenschaft, dass es um das Anfangswerte $(t_0, \vec{y}_0)$ aus dem Inneren von D eine zumindest kleine Umgebung U geben muss, auf welcher gelte

$$\|f(t, \vec{y}_2) - f(t, \vec{y}_1)\| \leq L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$$

für alle $(t, \vec{y}_2)$ und $(t, \vec{y}_2)$ aus U mit einer so genannten Lipschitz-Konstanten $L > 0$.

Differentialgleichungen erster Ordnung

Im Folgenden untersuchen wir Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(t, y),\ t \in I, \tag{3}$$

bzw. die assoziierten Anfangswertprobleme

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{4}$$

unter der Annahme, dass Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind.

Ziel ist die Ermittlung der eindeutigen Lösung von (4) bzw. der allgemeinen Lösung von (3).

Elementare Lösungsverfahren

1. **Form** $y' = f(t)$

   $\Longrightarrow y(t) = \int f(t)dt \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = F(t) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

2. **Form** $y' = f(t) \cdot g(y)$ (Differentialgleichung mit trennbaren Variablen)

   $\Longrightarrow y' = \frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(t)dt$

   $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt$ bzw. $K(y) = H(t) + c,\ c \in \mathbb{R} \quad (g(y) \neq 0),$
   mit beliebigen Stammfunktionen $K(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$ und $H(t)$ von $f(t)$.

3. **Form** $y' = g(y)$ (Autonome Differentialgleichung)

   $\Longrightarrow$ wie 2. mit $f(t) = 1$

4. **Form** $y' = f(at + by + c),\ a, b, c \in \mathbb{R}$

   $\Longrightarrow z = at + by + c \quad \Rightarrow \quad z'(t) = a + by'(t) = a + bf(at + by + c) =$
   $a + bf(z) \quad \Rightarrow$ Autonome Differentialgleichung.

Elementare Lösungsverfahren

5. **Form** $y' = f\left(\frac{y}{t}\right),\ t \neq 0$ (Ähnlichkeits-Differentialgleichung)

   $\Longrightarrow z = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow \quad y = tz,\ y' = tz' + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad z'(t) = \frac{f(z)-z}{t} \quad \Rightarrow$ Trennung der Variablen.

6. **Exakte Differentialgleichung** $y'(t) = -\frac{g(t,y(t))}{h(t,y(t))}$ und es gibt $U(t,y(t))$ so dass $\frac{\partial U}{\partial t}(t,y) = g(t,y)$ und $\frac{\partial U}{\partial y}(t,y) = h(t,y)$ (existiert, falls $\frac{\partial g}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,y)$)
   $\Longrightarrow U(t,y) = \int_{t_0}^{t} g(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} h(t,z)dz$. Man löst dann $U(t,y(t)) = U(t_0,y_0)$ nach $y = y(t)$ auf falls möglich.

7. **Integrierender Faktor** $y'(t) = -\frac{g(t,y(t))}{h(t,y(t))}$, aber nicht exakt $\Longrightarrow$ erweitere Bruch geschickt mit $M(t,y(t))$ so dass exakte DGL entsteht

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten

$$y'(t) + p(t)y(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 = a \leq t \leq b$$

wobei $p(t)$ und $q(t)$ stetig auf $I = (a, b)$ sind. Gilt dabei $g(t) = 0$, heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.
Dann gilt für die Lösung der homogenen Gleichung

$$y(t) = y_0 e^{-P(t)} \quad \text{mit } P(t) = \int_{t_0}^{t} p(z)dz$$

und für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{P(z)} g(z)dz \right)$$

Dabei ist $e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{P(z)} g(z)dz$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.
Es gilt: Lösung der DGL= Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung + eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten

$$y'(t) + p(t)y(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 = a \leq t \leq b$$

wobei $p(t)$ und $q(t)$ stetig auf $I = (a, b)$ sind. Gilt dabei $g(t) = 0$, heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.
Dann gilt für die Lösung der homogenen Gleichung

$$y(t) = y_0 e^{-P(t)} \quad \text{mit } P(t) = \int_{t_0}^{t} p(z)dz$$

und für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = e^{-P(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{P(z)} g(z)dz \right)$$

Dabei ist $e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{P(z)} g(z)dz$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.
Es gilt: Lösung der DGL= Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung + eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung Alternativ: spezielle Lösung mit *Variation der Konstanten*

Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t), \quad b, c \neq 0$$

mit 2 entsprechenden Nebenbedingungen (AWP oder RWP). Betrachten wir zuerst die homogene Gleichung $g(t) = 0$. Als Ansatz wählen wir $y(t) = Ce^{\lambda t}$. Man bestimmt λ als Lösung der *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Es treten folgende Fälle auf:

1) zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
2) zwei komplexe Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 = -\mu \pm\ i\omega$: $\mu = \frac{1}{2}b$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-b^2 + 4c}$
   $y(t) = e^{-\mu t}\left[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right]$ oder $y(t) = Ae^{-\mu t}\sin(\omega t + \varphi)$ wobei A und φ zu bestimmen sind
3) eine reelle Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2$: $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{b}{2}t}$

Man wähle c_1, c_2 so, dass AWP bzw. RWP erfüllt ist.

Lösung der inhomogenen DGL

Sei nun $g(t) \neq 0$,

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t), \quad b, c \neq 0 \tag{5}$$

mit entsprechenden Nebenbedingungen (AWP oder RWP). Sei $y_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung und $y_p(t)$ eine partikuläre Lösung von (5), es gelte also

$$y_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = g(t).$$

Dann gilt für die allgemeine Lösung $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. Dies lässt sich auf lineare DGL höherer Ordnung übertragen

Wir beschränken uns auf den Fall, die partikuläre Lösung mittels eines Ansatzes zu finden:

$g(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
ct^n, $n \in \mathbb{N}_0$	$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$
$ct^n e^{\alpha t}$, $n \in \mathbb{N}_0$	$e^{\alpha t}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)$
$e^{\alpha t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$, $\omega > 0$	$e^{\alpha t}(a_0 \cos(\omega t) + a_1 \sin(\omega t))$

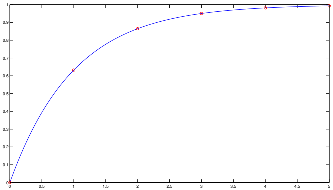
Ist das so gewählte y_p identisch mit einer Lösung der homogenen DGL, so wird y_p durch ty_p ersetzt (Fall 1,2) bzw durch $t^2 y_p$ (Fall 3).

Numerische Lösungsverfahren

Je komplizierter die Differentialgleichung, desto schwieriger lassen sich analytische Lösungen finden. Man weicht dann auf numerische Lösungsverfahren auf. Dabei wird die gesuchte Lösung $y = y(t)$ für diskrete Werte t_n angenähert.
Wir betrachten Verfahren zur Lösung von Differentialbedingungen 1. Ordnung mit gegebenem Anfangswert,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t \in [t_0, t_e]$$

Wir wollen y in n Punkten (inklusive Startwert) berechnen und werden dazu einführend 2 Verfahren kennen lernen.
Es sei $t_i = t_0 + i\frac{t_e - t_0}{n}$, $i = 0, ..., n-1$, wobei $h := \frac{t_e - t_0}{n-1}$ die **Schrittweite** (in der Diskretisierung) darstellt. Man schreibt oft $y_i := y(t_i)$



$$y(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \in [0, 5]$$

$t_0 = 0$, $t_e = 5$, $n = 6$
$h = \frac{5-0}{5} = 1$
$t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$, $t_5 = 5$

Explizites Eulerverfahren

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t \in [t_0, t_e]$$

Idee: ersetze $y'(t)$ durch den Differenzenquotienten:

$$y'(t_i) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} \underset{h \text{ 'klein'}}{\approx} \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$$

Zum Zeitpunkt t_i gilt

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)),$$

also ungefähr

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i))$$

Stellt man dies nach $y(t_{i+1})$ um, erhält man das **explizite Eulerverfahren**

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \cdot f(t_i, y(t_i)),$$

wobei obiger Schritt für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ berechnet wird.

Beispiel

$$y'(t) = \sqrt{\frac{1+y^2(t)}{1+t}}, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,1]$$

Wir wählen Schrittweite $h = 0.1$ und haben:

$$y(t_0) = y(0) = 0$$

$$y(t_1) = y(0.1) = y(t_0) + h \cdot \sqrt{\frac{1+(y(t_0))^2}{1+t_0}} = 0 + 0.1 \cdot \sqrt{\frac{1+0^2}{1+0}} = 0.1$$

$$y(t_2) = y(0.2) = y(t_1) + h \cdot \sqrt{\frac{1+(y(t_1))^2}{1+t_1}} = 0.1 + 0.1 \cdot \sqrt{\frac{1+0.1^2}{1+0.1}} = 0.195$$

$$y(t_3) = y(0.3) = y(t_2) + h \cdot \sqrt{\frac{1+(y(t_2))^2}{1+t_2}} = 0.195 + 0.1 \cdot \sqrt{\frac{1+0.195^2}{1+0.195}} = 0.289$$

... usw ...

$$y(t_{10}) = y(1) = y(t_9) + h \cdot \sqrt{\frac{1+(y(t_9))^2}{1+t_9}} = \cdots = 0.93$$

Das Explizite Eulerverfahren ist

- das einfachste numerische Verfahren für DGL
- demonstriert die Idee hinter numerischen Verfahren
- *instabil*
- in Praxis ungeeignet
- hat Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h)$ (konvergiert also recht langsam)
- für sehr kleine h kann fehler durch Rundung unbeschränkt wachsen

Es gibt zahlreiche Alternativen, wir lernen hier nur das **Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** kennen. Dabei wird die rechte Seite $f(t, y(t))$ auch an Zwischenpunkten ausgewertet. Noch genauere Methoden nutzen die Informationen vorheriger zeitschritte, man spricht dann von *Mehrschrittverfahren*

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_e]$$

Wir unterteilen wieder $y_i = y(t_i) = y(t_0 + i \cdot h)$, $h = \frac{t_e - t_0}{n-1}$ und haben

$$\begin{aligned}
k_1 &:= f(t_i, y_i) \\
k_2 &:= f(t + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1 \\
k_3 &:= f(t + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2 \\
k_3 &:= f(t + h, y_i + h \cdot k_3 \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Vergleich beider Verfahren

$$y'(t) = \sqrt{\frac{1+y^2(t)}{1+t}}, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,1]$$

Schrittweite $h = 0.1$, exakte Lösung $\sinh(2\sqrt{1+t} - 2)$

x	Euler-V	RK-V	ex. Lösung
0.1	0.10000000	0.09777283	0.09777281
0.2	0.19582180	0.19205168	0.19205165
0.3	0.28884269	0.28403779	0.28403775
0.4	0.38013386	0.37468747	0.37468742
0.5	0.47054963	0.46477934	0.46477928
0.6	0.56078699	0.55496031	0.55496023
0.7	0.65142645	0.64577805	0.64577797
0.8	0.74296097	0.73770438	0.73770429
0.9	0.83581662	0.83115244	0.83115234
1.0	0.93036790	0.92648951	0.92648940