Übungen aus Mathematik II **SS 2014**

Übungsblatt 12 17.06.2014

DI Roland Wagner, S2 524
E-mail: roland.wagner@ricam.oeaw.ac.at
Tel.: 0732 2468 4112

DI Markus Ableidinger, S2 619
E-mail: markus.ableidinger@jku.at
Tel.: 0732 2468 4167

https://www.dk-compmath.jku.at/Members/dgerth/vorlesung-mathematik-fur-chemiker-ii-ss14/

67. Einfache Populationsmodelle:
Zur Modellierung der Populationsgröße einer Tierart bezeichnen wir mit $G(t)$ die Geburtenrate und mit $S(t)$ die Sterberate der Art zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$.

    (a) Für konstante Geburt- und Sterberate $G(t) = c_1, S(t) = c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ und Anfangsbestand y_0 ist die Populationsgröße $y(t)$ zum Zeitpunkt t durch die Differentialgleichung

    $$\begin{aligned} y'(t) &= c_1 - c_2 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

    gegeben. Klassifizieren Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Lösung $y(t)$.

    (b) Hängen Geburt- und Sterberate linear von der Populationsgröße ab, ändert sich die Differentialgleichung auf

    $$\begin{aligned} y'(t) &= c_1 y(t) - c_2 y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

    Klassifizieren Sie die Differentialgleichung und bestimmenen Sie die Lösung $y(t)$.

68. Verhulst-Modell:
Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Populationsgröße einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$, $R \in \mathbb{R}^+$ sei die Reproduktionsrate der Kultur, $K \in \mathbb{R}^+$ die Fassungskapazität des Ökosystems und y_0 der Anfangsbestand der Bakterien. Die Populationsgröße ist nun durch

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ry(t) - \frac{R}{K} y(t)^2 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

gegeben. Klassifizieren Sie die Differentialgleichung und bestimmen sie die Lösung $y(t)$.
Hinweis: Zur expliziten Auflösung nach $y(t)$ nehmen Sie an, dass $y(t) \in [0, K]$, $\forall t \in [0, T]$ gilt. Inhaltlich bedeutet dies, dass keine negativen Population bzw. Population, die die Kapazität des Ökosystems übersteigen, erlaubt sind.

69. Wir betrachten den Sinkvorgang eines massebehafteten Teilchens in einer Flüssigkeit. Dazu sei $m \in \mathbb{R}^+$ die Masse des Teilchens, $k \in \mathbb{R}$ der Reibungskoeffizient zwischen Teilchen und Flüssigkeit sowie $g = 9.81$ die Erdbeschleunigung. Die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist durch

$$v'(t) = \frac{mg - kv(t)}{m}$$

gegeben. Klassifizieren Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die allgemeine Lösung $v(t)$.

70. Wir betrachten den Bremsvorgang eines Fahrzeugs mit konstanter Bremsverzögerung $a \in \mathbb{R}^+$ und Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die bei diesem Vorgang bis zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ zurückgelegte Wegstrecke $y(t)$ ist durch

$$\begin{aligned} y'(t) &= v_0 - at \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ und berechnen Sie den Zeitpunkt t_0 an dem das Fahrzeug zum Stehen kommt (d.h. $y'(t_0) = 0$) sowie den dafür benötigten Bremsweg.

71. Sei

$$y'(t) = -\frac{2ty(t) - t}{t^2} \qquad t \in [1, T]$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$.

72. Sei

$$y'(t) = \frac{y(t)^2}{t^2} - \frac{y(t)}{t} \qquad t \in [1, T]$$

gegeben. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$.
Hinweis: Zur expliziten Auflösung nehmen Sie an, dass $\frac{y(t)}{t} \geq 2, \forall t \in [1, T]$ gilt.