Übungen aus Mathematik II — SS 2014

Übungsblatt 10 — 20.05.2014

DI Roland Wagner, S2 524
E-mail: roland.wagner@ricam.oeaw.ac.at
Tel.: 0732 2468 4112

DI Markus Ableidinger, S2 619
E-mail: markus.ableidinger@jku.at
Tel.: 0732 2468 4167

https://www.dk-compmath.jku.at/Members/dgerth/vorlesung-mathematik-fur-chemiker-ii-ss14/

55. Die Bewegung eines massebehafteten Teilchens wird durch die Kurve

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sqrt{t} - 1 \\ t\cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 4\pi]$$

beschrieben. Stellen Sie die Bewegung graphisch dar und berechnen Sie die Geschwindigkeit sowie die Norm der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = \frac{3\pi}{4}$.

56. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds$$

für

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} (-t, 2t-2) & t \in [0,1) \\ (t-2, t-1) & t \in [1,2) \\ (\cos(\frac{3\pi-4}{2}+t), \sin(\frac{3\pi-4}{2}+t)+2) & t \in [2, \frac{4+\pi}{2}] \end{cases}$$

und

$$f(x,y) = 1 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

57. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds$$

für

$$f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}, \quad (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \qquad \text{und} \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0,5].$$

58. Berechnen Sie die Bogenlänge von

$$f(x) = \sqrt{x^3}\sqrt{2} + 2$$

im Intervall $[0,5]$.

59. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{f}(x,y,z)d(x,y,z)$$

für

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \\ \cos(\sqrt[3]{y}) \\ 1/z \end{pmatrix}, z \neq 0, \qquad \text{und} \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}, t \in [1,5].$$

60. Sei

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2\cos(y) - \sin(z)\sin(x) \\ -\frac{1}{3}x^3\sin(y) + \frac{z^2}{y^2} \\ \cos(x)\cos(z) - \frac{2z}{y} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ ein Potentialfeld ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $V(x,y,z) = \frac{x^3}{3}\cos y + \cos x \sin z - \frac{z^2}{y}$ das Potential zu $\vec{f}$ ist.

c) Sei $\vec{\gamma}$ der Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(-1,2,1)$ der in einer Ebene parallel zur $x-y$-Achse liegt. Berechnen Sie $\int_{\vec{\gamma}} \vec{f} ds$ über den vollen Kreis.

d) Berechnen Sie

$$\int_D V(x,y,z)d(x,y,z)$$

mit $D = [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$, wobei V das Potential zu $\vec{f}$ ist.