

# Lineare Algebra

## Mathematik II für Chemiker

Daniel Gerth

# Überblick Lineare Algebra

## Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter Vektoren versteht
- Wie man einfache geometrische Sachverhalte beschreibt
- Was man unter Matrizen versteht, und wie man mit ihnen rechnet
- Was Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bedeuten
- Wie man lineare Gleichungssysteme löst

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Vektoren
- 2 Geraden und Ebenen
- 3 Matrizen
- 4 Lineare Gleichungssysteme
- 5 Determinante, Eigenwerte, Eigenvektoren

# Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

# Motivation

Bislang wurden nur eindimensionale Größen betrachtet. Damit können Phänomene beschrieben werden, die nur von *einer* Zahl (einem *Skalar* = ein Zahlenwert bezüglich einer Skala) abhängen. Oft benötigt man jedoch einen Satz *mehrerer Zahlen* zur vollständigen mathematischen Beschreiben, zum Beispiel für

- geometrische Sachverhalte (Bewegung, Längen, Winkel, Abstände in 2D, 3D)
- Größen die in einem geometrischen Raum 'wirken' (z.B. Kraft  $F$  wirkt im 3-dimensionalen Raum in  $x$ -  $y$ - und  $z$ -Richtung, Geschwindigkeit  $v, \dots$ )
- Größen, die von mehreren Eigenschaften abhängen (zB Dichte des Gemischs mehrerer Stoffe)
- Sachverhalte, die in der mehrere Größen auf einmal beschrieben werden können/sollen

# Notation

Wir betrachten allgemein den Raum  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus  $n$  reellen Zahlen. (man kann -ganz analog- den Raum  $\mathbb{C}^n$  einführen). Aber starten wir mit den wichtigsten Spezialfällen:

- $n = 1$ :  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , also die uns bekannten reellen Zahlen
- $n = 2$ :  $\mathbb{R}^2$ , geometrisch die 2-dimensionale Ebene. Es wird beschrieben mit einem 2-Tupel (Vektor) reeller Zahlen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $n = 3$ :  $\mathbb{R}^3$ , geometrisch der 3-dimensionale Raum. Er wird beschrieben mit einem 3-Tupel (Vektor) reeller Zahlen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

# allgemein

$\mathbb{R}^n$  als  $n$ -Tupel (Vektor) reeller Zahlen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ , dabei bezeichnet  $()^T$  den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

# allgemein

$\mathbb{R}^n$  als  $n$ -Tupel (Vektor) reeller Zahlen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ , dabei bezeichnet  $()^T$  den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

$x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

# allgemein

$\mathbb{R}^n$  als  $n$ -Tupel (Vektor) reeller Zahlen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

zur besseren Übersicht schreiben wir  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ , dabei bezeichnet  $()^T$  den *transponierten Vektor* (indem wir Spalten als Zeilen schreiben bzw. später Zeilen als Spalten)

$x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind die *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors

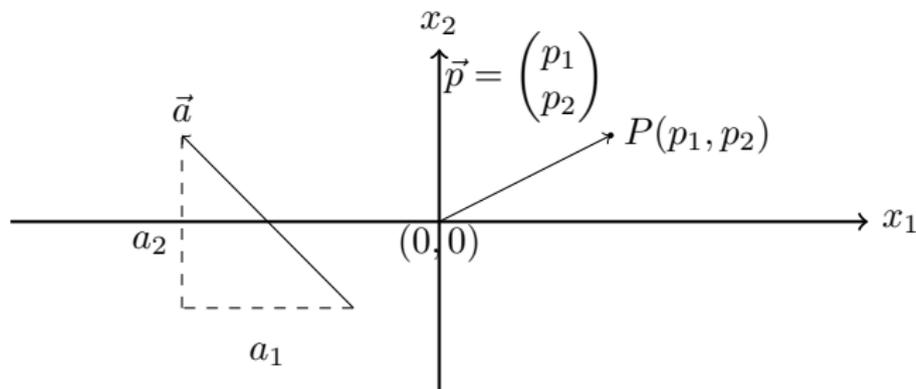
Notation: im geometrischen Zusammenhang schreiben wir  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

Ebenfalls üblich:  $\bar{x}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\underline{x}$

Im entsprechenden Kontext wird oft auch einfach  $x$  verwendet.

## Geometrische Interpretation am Beispiel $n = 2$

Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene mit Ursprung  $O = (0,0)$  und Achsen  $x_1$  und  $x_2$ .



Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  beschreibt eine Richtung "gehe  $a_1$  Schritte in Richtung positiver  $x_1$ -Achse und  $a_2$  Schritte in Richtung positiver  $x_2$ -Achse".

Jeder Punkt  $P = (p_1, p_2)$  in  $\mathbb{R}^2$  wird charakterisiert durch einen Vektor

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ , der am Ursprung angesetzt wird.  $\vec{p}$  heisst dann *Ortsvektor* zu  $P$ .

(analog für beliebiges  $n$ )

# Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren:  $\vec{a} + \vec{b} = ?$ , dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

# Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren:  $\vec{a} + \vec{b} = ?$ , dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren:  $\lambda \vec{x} = ?$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

# Rechenoperationen

Wir wollen Vektoren addieren:  $\vec{a} + \vec{b} = ?$ , dies geschieht komponentenweise

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Vektoren mit einer Zahl multiplizieren:  $\lambda \vec{x} = ?$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel,  $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

# Vektorraum-Eigenschaften

Sei  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann schreiben wir  $-\vec{a}$  für  $(-1) \cdot \vec{a}$ . Den Vektor  $(0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir kurz  $\vec{0}$ . Damit gilt für  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

# Vektorraum-Eigenschaften

Sei  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann schreiben wir  $-\vec{a}$  für  $(-1) \cdot \vec{a}$ . Den Vektor  $(0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir kurz  $\vec{0}$ . Damit gilt für  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

a)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

b)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

d)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

e)  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

f)  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

g)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

# Vektorraum-Eigenschaften

Sei  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann schreiben wir  $-\vec{a}$  für  $(-1) \cdot \vec{a}$ . Den Vektor  $(0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir kurz  $\vec{0}$ . Damit gilt für  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

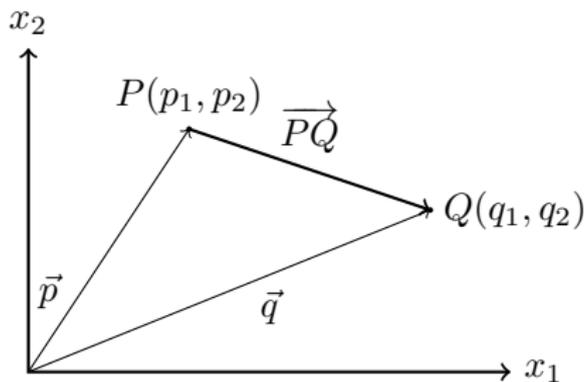
- a)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- b)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- c)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- d)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- e)  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$
- f)  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
- g)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

## Definition 1.1

Eine Menge  $V$  mit Addition  $+$  und skalarer Multiplikation  $\cdot$ , so dass mit  $a, b \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  [ $\lambda \in \mathbb{C}$ ] auch  $a + b \in V$ ,  $\lambda \cdot a \in V$  und bezüglich  $+$ ,  $\cdot$  die Eigenschaften a)-g) gelten, heißt **Vektorraum über  $\mathbb{R}$**  [über  $\mathbb{C}$ ]

Hinweis: wir werden uns im Folgenden auf reelle Vektorräume beschränken

Beachten Sie immer den Unterschied zwischen Punkt und Vektor! Ein Punkt ist fest durch Koordinatenursprung und Koordinaten (Ortsvektor) bestimmt. Ein Vektor beschreibt nur eine Richtung und kann an jedem Punkt angesetzt werden. Wie kommt man nun von einem Punkt zum anderen?



Seien  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  Punkte im  $\mathbb{R}^n$ . Der Vektor

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \text{ beschreibt die Richtung von Punkt } P \text{ zu Punkt } Q.$$

Es gilt  $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ}$ , wobei  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  die Ortsvektoren zu  $P$  und  $Q$  sind.

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel  
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

Mit diesen Eigenschaften können wir uns im Vektorraum 'bewegen'. Zur Beschreibung einer Bewegung bzw. eines Objekts benutzen wir jedoch oft spezielle Kenngrößen: Längen, Abstände und Winkel  
Welche Bedingungen sollte eine 'Länge' erfüllen?

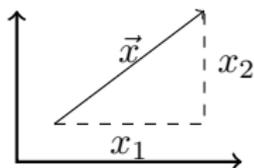
## Definition 1.2

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Norm** auf  $V$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- $\forall x \in V : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  und  $\|x\| \geq 0$
- $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

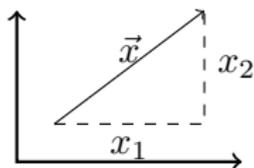
$(V, \|\cdot\|)$  heißt **normierter Raum**.

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:

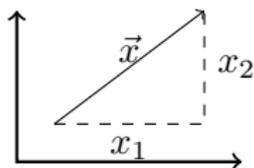


Sei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Sein nun  $n = 3$ . Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Sei nun  $n = 3$ . Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:

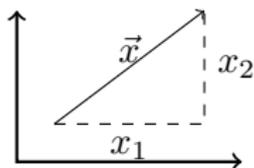
$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

### Definition 1.3

Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$  die **euklidische Norm**. Man nennt sie auch **Länge** oder **Betrag** des Vektors und schreibt  $|\vec{x}|$  statt  $\|\vec{x}\|_2$ .

Wie definiert man so eine Norm? Die 'natürlichste' Möglichkeit kann vom Satz des Pythagoras abgeleitet werden:



Sei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Sei nun  $n = 3$ . Man kann wieder mittels Satz des Pythagoras herleiten:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

### Definition 1.3

Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2}$  die **euklidische Norm**. Man nennt sie auch **Länge** oder **Betrag** des Vektors und schreibt  $|\vec{x}|$  statt  $\|\vec{x}\|_2$ .

### Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ Dann } \|\vec{x}\|_2 = |\vec{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{59} \approx 7.68$$

Der Betrag eines Vektors erfüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

Der Betrag eines Vektors erfüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

## Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ . Der Vektor  $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  heißt **Einheitsvektor in Richtung  $\vec{x}$** .

Der Betrag eines Vektors erfüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

### Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ . Der Vektor  $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  heißt **Einheitsvektor in Richtung  $\vec{x}$** .

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Der Betrag eines Vektors erfüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

## Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ . Der Vektor  $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  heißt **Einheitsvektor in Richtung  $\vec{x}$** .

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  Punkte in  $\mathbb{R}^n$  mit Ortsvektoren  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$ . Der **Abstand** zwischen  $P$  und  $Q$  ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$

Der Betrag eines Vektors erfüllt in der Tat die Bedingungen einer Norm. Es gibt auch andere Möglichkeiten eine Norm zu definieren.

### Definition 1.4

Ein Vektor der Länge eins heißt **Einheitsvektor**. Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T$ . Der Vektor  $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  heißt **Einheitsvektor in Richtung  $\vec{x}$** .

Mit einer Norm können wir auch Abstände berechnen. Da Vektoren frei verschiebbar sind, macht dies nur für Punkte, also Ortsvektoren, Sinn!

Seien  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  Punkte in  $\mathbb{R}^n$  mit Ortsvektoren  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$ . Der **Abstand** zwischen  $P$  und  $Q$  ist

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$

### Beispiel

$$P = (1, -2, 3), Q = (-1, -2, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

## Definition 1.5

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Skalarprodukt** (*inneres Produkt*) auf  $V$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  und  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt **euklidischer Vektorraum**.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

## Definition 1.5

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Skalarprodukt** (inneres Produkt) auf  $V$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  und  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt **euklidischer Vektorraum**.

## Theorem 1

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann ist  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm auf  $V$ ,  $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$  ein normierter Raum.

Zur Messung von Winkeln führen wir das *Skalarprodukt* ein.

## Definition 1.5

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Skalarprodukt** (inneres Produkt) auf  $V$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  und  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y, z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt **euklidischer Vektorraum**.

## Theorem 1

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann ist  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm auf  $V$ ,  $(V, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$  ein normierter Raum.

## Theorem 2

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\forall x, y \in V : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

## Definition 1.6

Seien  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Das (euklidische) Skalarprodukt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  ist definiert als

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  anstatt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ .

## Definition 1.6

Seien  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Das (euklidische) Skalarprodukt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  ist definiert als

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  anstatt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ .

## Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$$

## Definition 1.6

Seien  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Das (euklidische) Skalarprodukt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  ist definiert als

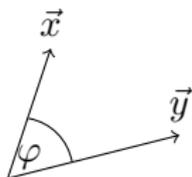
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Man schreibt auch  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  anstatt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ .

## Beispiel

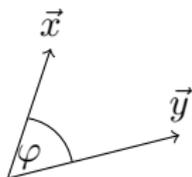
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 5$$

Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Dann  $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , also gerade die Länge des Vektors  $\vec{x}$ . Mit anderen Worten:  $\|\vec{x}\|_2^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ .



Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi$  der von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$



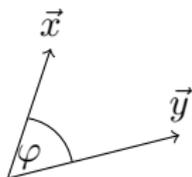
Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi$  der von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Ist  $\varphi = 90^\circ$ , so stehen die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  senkrecht aufeinander.

### Definition 1.7

Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ . Gilt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ , so nennen wir  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  **orthogonal** zueinander. Gilt zusätzlich  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$ , so nennen wir sie **orthonormal**.



Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varphi$  der von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  eingeschlossene Winkel. Dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Ist  $\varphi = 90^\circ$ , so stehen die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  senkrecht aufeinander.

### Definition 1.7

Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ . Gilt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ , so nennen wir  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  **orthogonal** zueinander. Gilt zusätzlich  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$ , so nennen wir sie **orthonormal**.

### Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Dann } \|\vec{x}\| = \sqrt{6}, \|\vec{y}\| = \sqrt{10}, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4. \text{ Also}$$
$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} \approx 0.51, \text{ also } \varphi = 58.9^\circ.$$

# Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

## Definition 1.8

Seien  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Das **Kreuzprodukt** (auch **Vektorprodukt** genannt) ist definiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

# Kreuzprodukt

Im 3-dimensionalen Raum (und nur dort!) haben wir noch eine weitere wichtige Größe:

## Definition 1.8

Seien  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ . Das **Kreuzprodukt** (auch **Vektorprodukt** genannt) ist definiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

## Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 0.5 \cdot 4 \\ 0.5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Eigenschaften des Kreuzprodukts

Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ .

- Sei  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Dann ist  $\vec{c}$  orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bilden ein Rechtssystem
- $\|\vec{c}\|$  entspricht dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelograms
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Achtung: es gilt **nicht**  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

# Linearkombination

## Definition 1.9

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Linearkombination** der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  falls es  $k$  reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  gib so dass

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i.$$

# Linearkombination

## Definition 1.9

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Linearkombination** der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  falls es  $k$  reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  gib so dass

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i.$$

## Beispiel

Sei  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$  eine Linearkombination von  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  denn  $\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$

## Definition 1.10

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  **(linear) Unabhängig**, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

## Definition 1.10

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  **(linear) Unabhängig**, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

## Beispiel 1

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}$  wie zuvor, also  $\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ . Dann ist  $\vec{u} - 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 = 0$ . Es gilt also  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ . Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

## Definition 1.10

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  **(linear) Unabhängig**, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

## Beispiel 1

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}$  wie zuvor, also  $\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ . Dann ist  $\vec{u} - 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 = 0$ . Es gilt also  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ . Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

## Beispiel 2

Seien  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  Nun gilt  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = 0$  nur, falls  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ . Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

## Definition 1.10

Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$   $k$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  **(linear) Unabhängig**, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i$$

## Beispiel 1

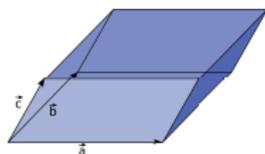
Seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}$  wie zuvor, also  $\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ . Dann ist  $\vec{u} - 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 = 0$ . Es gilt also  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ . Die Vektoren sind folglich nicht linear unabhängig.

## Beispiel 2

Seien  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  Nun gilt  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = 0$  nur, falls  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ . Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

Untersuchung von Vektoren auf Unabhängigkeit führt i.A. auf ein lineares Gleichungssystem. Ausnahme: zwei Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sind linear unabhängig, genau dann wenn sie **parallel** sind, d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  so dass  $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$

# Spatprodukt



Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , die ein Parallelepiped (Spat) im  $\mathbb{R}^3$  aufspannen.

## Definition 1.11

Das **Spatprodukt** ist definiert als Kombination von Kreuz- und Skalarprodukt:

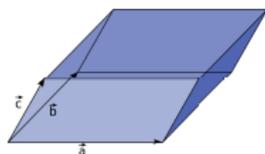
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

## Beispiel

Seien  $\vec{a} = (1, -1, -2)^T$ ,  $\vec{b} = (0, -1, 0)^T$ ,  $\vec{c} = (1, 0, 1)^T$ . Dann ist

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 1$$

# Spatprodukt



Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , die ein Parallelepiped (Spat) im  $\mathbb{R}^3$  aufspannen.

## Definition 1.11

Das **Spatprodukt** ist definiert als Kombination von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Für das Volumen  $V$  des Parallelepipeds gilt:  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- weitere Eigenschaften können aus den Eigenschaften von Kreuz- und Skalarprodukt abgeleitet werden

## Beispiel

Seien  $\vec{a} = (1, -1, -2)^T$ ,  $\vec{b} = (0, -1, 0)^T$ ,  $\vec{c} = (1, 0, 1)^T$ . Dann ist

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 1$$

## Definition 1.12

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. Der Raum  $\mathbb{R}^n$  hat die Dimension  $n$ .

## Definition 1.12

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes heißt **Dimension**. Der Raum  $\mathbb{R}^n$  hat die Dimension  $n$ .

## Definition 1.13

Eine Menge  $n$  linear unabhängiger Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  heißt **Basis**.

## Theorem 3

Sei  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  eine Basis in  $\mathbb{R}^n$ . Dann lässt sich jeder Vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$  eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h. es gilt

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$$

mit mindestens einem  $\lambda_i \neq 0$ .

Wir haben bisher -und werden auch weiterhin- die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$  verwenden, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben bisher -und werden auch weiterhin- die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$  verwenden, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Dann gilt

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3.$$

# Geraden

Wir beschränken uns nun auf den 3-dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Wir wissen bereits, wie man einen Punkt im  $\mathbb{R}^3$  darstellt.

## Definition 2.1

*Eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  wird bestimmt durch einen Punkt (mit Ortsvektor  $\vec{p}$ ), durch den sie geht, sowie die Richtung  $\vec{r}$ , in die sie verläuft.*

$$g := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Jeder Punkt auf der Gerade wird für ein bestimmtes  $\lambda$  erreicht. Sei  $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ . Dann liegt  $Q$  auf der Geraden  $g$  genau dann wenn es ein  $\lambda_0$  gibt so dass  $\vec{q} = \vec{p} + \lambda_0 \vec{r}$ .

## Beispiel

Sei  $P = (1, -2, 3)^T$ ,  $Q = (3, 2, -1)^T$ . Die Gerade durch die Punkte  $P$  und  $Q$  ist gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt  $A(3, 2, -1)$  liegt (mit  $\lambda = 1$ ) auf  $g$ , der Punkt  $B = (3, -1, -1)$  jedoch nicht.

# Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punkte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind nahezu äquivalent. Es ergibt sich die **Parameterform**

# Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punkte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind nahezu äquivalent. Es ergibt sich die **Parameterform**

## Definition 2.2

Ein Ebene im  $\mathbb{R}^3$  in Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

wobei  $\vec{p}$  der Ortsvektor zum Punkt  $P = (p_1, p_2, p_3)$  ist,  $\vec{r}, \vec{s}$  linear unabhängig sind und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

# Ebenen

Es gibt mehrere Wege eine Ebene zu beschreiben:

- über 3 gegebene Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen)
- über 2 gegebene Punkte und eine Richtung
- über 1 gegebenen Punkt und 2 (nicht parallele) Richtungen
- über 1 gegebenen Punkt und einen Normalenvektor

Die Varianten 1-3 sind nahezu äquivalent. Es ergibt sich die **Parameterform**

## Definition 2.2

Ein Ebene im  $\mathbb{R}^3$  in Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

wobei  $\vec{p}$  der Ortsvektor zum Punkt  $P = (p_1, p_2, p_3)$  ist,  $\vec{r}, \vec{s}$  linear unabhängig sind und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Seien  $P, Q$  und  $R$  drei verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist die Ebene durch die Punkte gegeben durch

$$E := \vec{p} + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR}.$$

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau eine Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei  $E = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s}$  und  $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ . Sei  $P = (p_1, p_2, p_3)^T$  ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau eine Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei  $E = \vec{p} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$  und  $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ . Sei  $P = (p_1, p_2, p_3)^T$  ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Es ist  $d := \vec{p} \cdot \vec{n}$  bekannt. Also ist

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

Dies ist die Ebenengleichung in **Koordinatenform**

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei Richtungen. Es gibt (bis auf das Vorzeichen) genau eine Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht. Sei  $E = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s}$  und  $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{s}$ . Sei  $P = (p_1, p_2, p_3)^T$  ein gegebener Punkt in der Ebene. Dann gilt für jeden weiteren Punkt  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  in der Ebene

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt **Normalenform**. Es gilt weiterhin:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Es ist  $d := \vec{p} \cdot \vec{n}$  bekannt. Also ist

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

Dies ist die Ebenengleichung in **Koordinatenform**. Sei  $\vec{e}_n := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  der Einheitsvektor in Richtung  $\vec{n}$ ,  $d_e := \vec{p} \cdot \vec{e}_n$ . Dann ist die **Hessesche Normalform** der Ebene gegeben durch

$$\vec{q} \cdot \vec{e}_n = d_e$$

## Beispiel

Gegeben seien die Punkte  $P = (1, 2, -1)$ ,  $Q = (-2, 1, 1)$ ,  $R = (5, -5, 0)$ . Dann ist die durch die 3 Punkte aufgespannte Ebene in Parameterform

$$E := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in Normalenform (mit  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (13, 11, 25)^T$ )

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 25 \end{pmatrix} = 0$$

und in Koordinatenform

$$13x_1 + 11x_2 + 25x_3 = 10$$

Je nach Aufgabe bieten sich andere Ebenendarstellungen an:

- Suchen einer Ebene, die senkrecht auf einer geg. Gerade steht: Normalenform, Koordinatenform
- Berechnen des Schnittpunktes einer Geraden und einer Ebene: Koordinatenform, Parameterform
- Berechnen des Abstands Punkt-Gerade: Normalenform
- Berechnen des Abstands eines Punktes zu einer Ebene: Normalenform, Koordinatenform
- Berechnen der Schnittgerade zweier Ebenen: Normalenform, Parameterform
- ...

# Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene

# Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - ▶ identisch
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einem Punkt
  - ▶ windschief

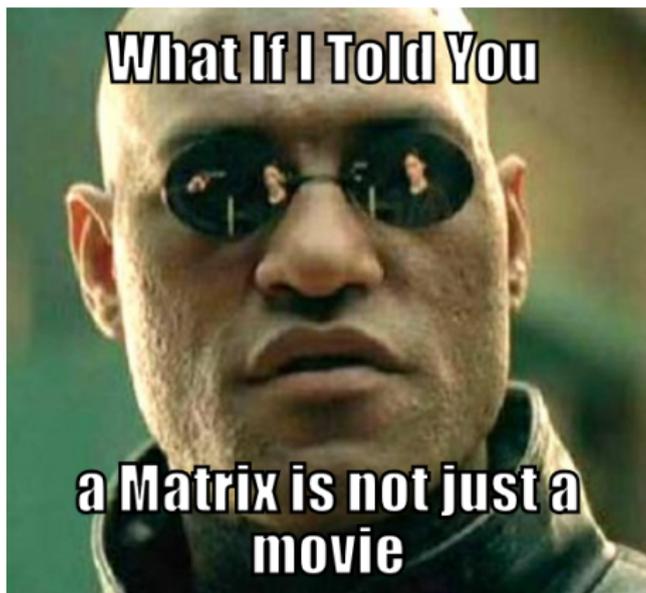
# Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - ▶ identisch
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einem Punkt
  - ▶ windschief
- Gerade-Ebene
  - ▶ Gerade liegt in Ebene
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einem Punkt

# Lagebeziehungen

- einfach: Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Gerade-Gerade
  - ▶ identisch
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einem Punkt
  - ▶ windschief
- Gerade-Ebene
  - ▶ Gerade liegt in Ebene
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einem Punkt
- Ebene-Ebene
  - ▶ parallel
  - ▶ schneiden sich in einer Gerade

# Matrizen



Matrizen beschreiben lineare Operatoren auf Vektoren, sie verallgemeinern die lineare Funktion  $y = ax$ . Sie treten auch bei linearen Gleichungssystemen auf.

## Definition 3.1

Unter einer reellen  $n \times m$ -**Matrix**  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  versteht man die  $n \cdot m$  Zahlen  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , die in dem rechteckigen Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Wir schreiben auch kurz  $A = (a_{ij})$ . Die Matrix  $A$  besteht aus  $n$  **Zeilen** und  $m$  **Spalten**. Die Zahlen  $a_{ij}$  heißen **Matrixelemente**. Die Elemente  $a_{i,i}$  heißen **Diagonalelemente**. Eine Matrix heißt **quadratisch** wenn  $m = n$ .

## Definition 3.1

Unter einer reellen  $n \times m$ -**Matrix**  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  versteht man die  $n \cdot m$  Zahlen  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , die in dem rechteckigen Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden. Wir schreiben auch kurz  $A = (a_{ij})$ . Die Matrix  $A$  besteht aus  $n$  **Zeilen** und  $m$  **Spalten**. Die Zahlen  $a_{ij}$  heißen **Matrixelemente**. Die Elemente  $a_{i,i}$  heißen **Diagonalelemente**. Eine Matrix heißt **quadratisch** wenn  $m = n$ .

## Beispiel

Es sind  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  und  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

## Definition 3.2

Unter der **transponierten** Matrix versteht man die Matrix  $A^T = (a_{ji})$ , die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt  $A = A^T$  so heißt  $A$  **symmetrisch**.

## Definition 3.2

Unter der **transponierten** Matrix versteht man die Matrix  $A^T = (a_{ji})$ , die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt  $A = A^T$  so heißt  $A$  **symmetrisch**.

## Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## Definition 3.2

Unter der **transponierten Matrix** versteht man die Matrix  $A^T = (a_{ji})$ , die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Gilt  $A = A^T$  so heißt  $A$  **symmetrisch**.

## Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## Definition 3.3

Eine Matrix  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit 1 als Diagonalelementen und 0 sonst,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Einheitsmatrix** (manchmal auch mit  $E$  bezeichnet)

# Lineare Gleichungssysteme

folgt

# Determinante, Eigenwerte, Eigenvektoren

folgt