Differentialrechnung

Mathematik I für Chemiker

Daniel Gerth

Überblick Differentialrechnung

Dieses Kapitel erklärt:

- Was man unter den Ableitungen einer Funktion versteht.
- Wie man die Ableitungen einer Funktion herleitet.
- Wie man weitergehend als in Kapitel "Abbildungen und Funktionen" charakteristische Stellen einer Funktion mit Hilfe ihrer Ableitungen bestimmt.
- Wie man allgemeine, unter Umständen kompliziert strukturierte Funktionen durch mathematisch einfache Funktionen annähert.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. Motivation

- Wie stark ist eine Funktion gekrümmt?
- Auf welche Weise lässt sich eine gegebene Funktion durch Polynome annähern?
- Wie lassen sich Nullstellen von Funktionen numerisch schnell und effizient berechnen?

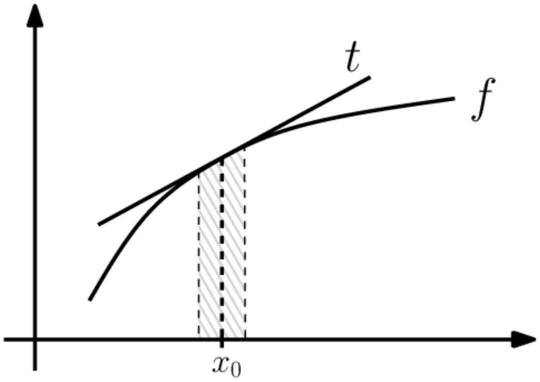
Der Anwendungsbereich der Differentialrechnung ist unmöglich in nur wenigen Worten zusammenfassen. Mit den Begriffen und den Zusammenhängen rund um die "Steigung" einer Funktion steht ein Apparat von Hilfsmitteln zur Verfügung, um viele Untersuchungen erheblich zu erleichtern.

In diesem Kapitel werden wir die grundlegende Idee der Differentialrechnung kennenlernen, um später auf ihre unterschiedlichen Anwendungen einzugehen.

Genug Motivation...???

Grundidee

Diese ist sehr einfach: Ersetzt man eine Funktion $f(x)$ nahe einer Stelle x_0 durch ihre Tangente $t(x)$, so macht man nahe x_0 nur kleine Fehler.



Die Tangente ist dabei als lineare Funktion viel leichter zu handhaben, als die Funktion f selbst.

Definition 1.1

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

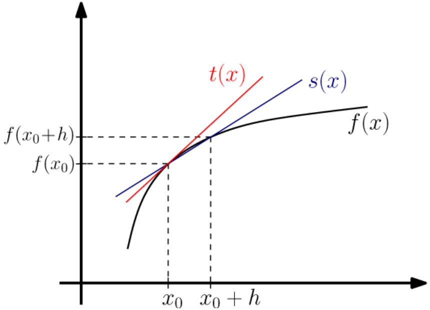
existiert. $f'(x_0)$ heißt erste Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Funktion f heißt differenzierbar in $M \subset D$, falls sie in **jedem** *Punkt $x_0 \in M$ differenzierbar ist. Man nennt die Funktion*

$$f : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x),$$

dann die erste Ableitung von f.

Geometrische Interpretation



$$s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\Big\downarrow\, h \to 0}(x - x_0)$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Für $h \to 0$ geht die Sekante $s(x)$ durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ in eine Tangente $t(x)$ über.

Die erste Ableitung $f'(x_0)$ ist also die Steigung der Tangente t an f im Punkt x_0.

Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion f in x_0 differenzierbar, und ist ihre Ableitung f' in x_0 wiederum differenzierbar, so erhält man durch erneutes Differenzieren die so genannte zweite Ableitung von f an der Stelle x_0 :

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Entsprechend wird (für $n \in \mathbb{N}$) die $n-$te Ableitung

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

von f an der Stelle x_0 definiert. (Dabei ist $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ zu setzen.)

Schreibweise:
Für die ersten drei Ableitungen schreibt man $f',\ f''$ und f'''.
Ab $n = 4$ schreibt man zumeist $f^{(n)}$.

Schreibweise. Differentialquotient

- Leibniz-Notation

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0), \\
f''(x_0) &= \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2}f(x_0) = \frac{df'}{dx}(x_0), \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x_0) &= \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n}f(x_0) = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x_0)
\end{aligned}
$$

- Wenn f von der Zeit t abhängt, wird die Ableitung von f zum Zeitpunkt t_0 auch mit $\dot{f}(t_0)$ notiert (diese Schreibweise wird von den Physikern sehr gerne verwendet).
- **Differenzenquotient** (die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Obwohl die Differenzen Δy und Δx jeweils gegen null konvergieren, besitzt der $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Fall der Differenzierbarkeit einen endlichen Grenzwert. Die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 wird daher auch als **Differentialquotient** bezeichnet.

Beispiele

- **Die konstante Funktion** $f_1(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar mit $f_1'(x) = 0$, denn

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \to 0, \;\; h \to 0.$$

- **Die lineare Funktion** $f_2(x) = ax$ $(a \in \mathbb{R})$ ist differenzierbar mit $f_2'(x) = a$, denn

$$\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{a(x+h) - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a \to a, \;\; h \to 0.$$

- **Die quadratische Funktion** $f_3(x) = x^2$ ist differenzierbar mit $f_3'(x) = 2x$, denn

$$\frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \to 2x, \;\; h \to 0.$$

Elementare Funktionen und ihre Ableitungen

$f(x)$	$x^n (n \in \mathbb{R})$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\ln(x)$
$f'(x)$	nx^{n-1}	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{x}$

Mit Hilfe der Ableitungsdefinition bestimme man die erste Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$.

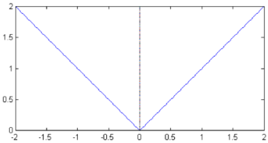
Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar, denn

- $$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h - 0}{h} = 1,$$
- aber
$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h - 0}{h} = -1 \neq 1.$$

Der Differenzenquotient besitzt also keinen Grenzwert für $h \to 0$.

Der bei $x_0 = 0$ auftretende "Knick" ist typisch für Funktionen, die stetig, aber nicht differenzierbar sind. Es ist offensichtlich, dass man in diesem Punkt keine eindeutig bestimmte Tangente finden kann.



Satz 1.2 (Bezug zur Stetigkeit)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweisidee:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \to 0, \; x \to x_0.$$

Achtung: Wie das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt, gibt es sehr wohl stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Die Umkehrung von Satz 1.2 ist also falsch!

Differenzierbarkeit ist somit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit.

Präzisierung des Linearisierungsgedankens

Wir wollen noch einmal den Bezug der Funktion f zu ihrer Tangente t nahe x_0 aufgreifen. Dabei hilft folgende alternative Charakterisierung der Differenzierbarkeit:

Satz 1.3

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \varphi(x) \tag{1}$$

und $\frac{\varphi(x)}{x-x_0} \to 0$ für $x \to x_0$. In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Präzisierung des Linearisierungsgedankens

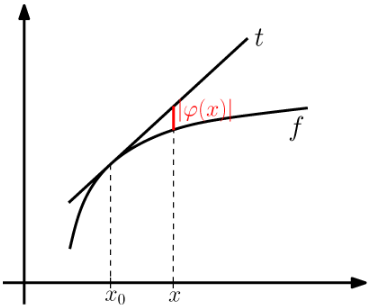
Mit der Tangentenfunktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ liest sich (1) für eine differenzierbare Funktion f als

$$f(x) = t(x) + \varphi(x) \text{ mit } \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \to 0,\ x \to x_0.$$

Grob gesprochen:

"**Funktion = Tangente + Restterm,** wobei der Restterm für $x \to x_0$ schneller als linear gegen Null geht".

Visualisierung:



Satz 2.1

Regeln für die Ableitung Sind $f, g: D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in D$*, dann sind* $cf \ (c \in \mathbb{R}),\ f \pm g,\ fg$ *und* f/g *(falls* $g(x_0) \neq 0$*) in* x_0 *differenzierbar.*

Dabei gelten folgende Regeln:

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$ *(für* $c \in \mathbb{R}$*),*
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ *(Summenregel),*
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *(Produktregel),*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ *(Quotientenregel).*

Beispiele

Finden Sie die Ableitungen von

- $f_1(x) = 7x^2 + 4x - 8$,
- $f_2(x) = (x+1)e^x$,
- $f_3(x) = \frac{e^x}{x}$,
- $f_4(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.2 (Kettenregel)

Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in D_f$ *differenzierbar und* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *in* $f(x_0) \in D_g$ *differenzierbar, dann ist* $(g \circ f)$ *ebenfalls in* x_0 *differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{2}$$

Die Multiplikation mit $f'(x_0)$ in (2) nennt man "Nachdifferenzieren". Außerdem sind für g' und f' die Begriffe "äußere" und "innere" Ableitung gebräuchlich.

In Leibniz-Notation schreibt man für (2) mitunter kurz

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Man bestimme die Ableitung von $h(x) = (x^2 - 4)^5$ $(x \in \mathbb{R})$.

Satz 2.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Die reelle Funktion $f : D \to W$ sei in $x_0 \in D$ differenzierbar und besitze die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$. Ist $f'(x_0) \neq 0$ und ist f^{-1} stetig in $f(x_0)$, dann ist f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ bzw. } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ für } y_0 = f(x_0).$$

Leibniz-Notation:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ für } y = f(x) \text{ bzw. } x = f^{-1}(y).$$

Beispiel

Für $y = f(x) = \sin(x),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, gilt $f'(x) = \cos(x) \neq 0$. Desweiteren ist $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ stetig. Damit gilt nach Satz 2.3

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Bestimmen Sie die auf diese Weise die Ableitungen von $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \sqrt{x}$.

Logarithmisches Differenzieren

Die Kettenregel liefert für positive differenzierbare Funktionen f die Gleichung

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

bzw.

$$f'(x) = (\ln(f(x)))' f(x).$$

Beispiel

Für $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ gilt

$$(x^x)' = (\ln(x^x))' x^x = (x \ln x)' x = (1 + \ln x) x^x.$$

Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$.

Ableitungen elementarer Funktionen

Die folgenden Tabellen sollten Sie am besten auswendig lernen. Die Ableitungen aller anderen Funktionen können Sie mit Hilfe von Definitionen und der Regel aus vorherigem Abschnitt leicht herleiten.

Potenz- und Exponentialfunktionen, Logarithmen

$f(x)$	$x^n (n \in \mathbb{R})$	e^x	$\ln(x)$	$a^x \ (a > 0)$	$\log_a(x)$
$f'(x)$	nx^{n-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$a^x \ln(a)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Ableitungen elementarer Funktionen

Arkusfunktionen

$f(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\operatorname{arccot}(x)$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Berechnen Sie die Ableitungen der $\tan(x)$, $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$ und anderer Funktionen aus den oben angegebenenTabellen.

Extrema, Wachstum und Krümmung differenzierbarer Funktionen

Definition 4.1

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ein Punkt $x \in D$ heißt lokales Maximum (lokales Minimum) von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \ (f(x_0) \leq f(x)) \text{ für alle } x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \tag{3}$$

x_0 heißt lokales Extremum von f, wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f ist.

Bei einem lokalen Extremum x_0 betrachtet man also nur das Verhalten der Funktion f sehr nahe bei x_0. Das Gegenstück sind globale Extrema, bei denen die Beziehung

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ bzw. } f(x_0) \leq f(x)$$

aus (3) für alle $x \in D$ gelten muss.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\cos(2x)$;
- $g : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{1+x}\cos(x)$

(qualitativ reicht), und machen Sie sich den Unterschied zwischen “global” und “lokal” auch graphisch klar.

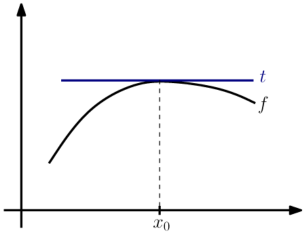
Satz 4.2 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Ist $x_0 \in (a, b)$ *ein lokales Extremum der differenzierbaren Funktion* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *dann gilt*

$$f'(x_0) = 0. \tag{4}$$

Mit Satz 4.2 kann man also die “Kandidaten” finden, die für ein lokales Extremum überhaupt in Frage kommen. Nur für diese wird man dann einen konkreten Nachweis versuchen.

Graphische Darstellung:



An einem Extremalstelle x_0 besitzt die Funktion f aus Satz 4.2 eine horizontale Tangente.

Satz 4.3 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit stetiger zweiter Ableitung und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann ist x_0

- *Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f''(x_0) > 0$,*
- *Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f''(x_0) < 0$.*

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f(x) = x^3 - 2x + 4$.

Analysieren Sie das Verhalten von $f(x) = x^n$ $(n = 2, 4, 5)$ im Hinblick auf die Sätze 4.2 und 4.3 und das tatsächliche Auftreten von Extrema.

Satz 4.4 (Bedingung für ein Extremum)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $k-$Mal differenzierbare Funktion mit stetiger $k-$ter Ableitung und $k \geq 2$. Gilt für eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, dass

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

so besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 genau dann ein Extremum, falls k eine **gerade** *Zahl ist.*

Dann ist x_0

- *Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f^{(k)}(x_0) > 0$,*
- *Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f^{(k)}(x_0) < 0$.*

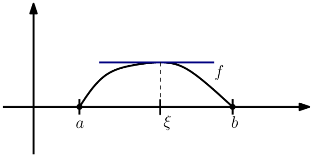
Analysieren Sie das Verhalten von $f(x) = x^n$ $(n = 2, 4, 5)$ im Hinblick auf den Satz 4.4.

Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus

Satz 4.5

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und in* (a, b) *differenzierbar, und gilt* $f(a) = f(b)$, *dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Graphische Darstellung:



Beweiseidee:

- f nimmt auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an. (**Warum?**)
- Liegen Maximum und Minimum auf dem Intervallrand, so ist $f(x) = 0$ auf $[a, b]$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.
- Ansonsten gibt es ein lokales Extremum $\xi \in (a, b)$. Für dieses gilt $f'(\xi) = 0$ nach Satz 4.2.

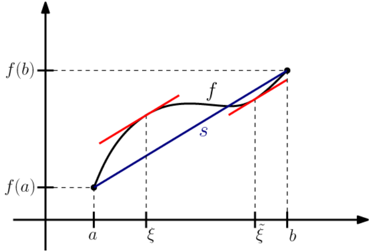
Die Voraussetzung $f(a) = f(b) = 0$ kann durch folgende Modifikation entfernt werden:

Satz 4.6 (Mittelwertsatz)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5}$$

Graphische Darstellung:



Die Funktion nimmt an mindestens einer Zwischenstelle ξ den Anstieg der Sekante s durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ an.

Monotonie

Mit dem Mittelwertsatz lässt sich sofort ein Ergebnis zur Bestimmung des Monotonieverhaltens einer differenzierbaren Funktion herleiten:

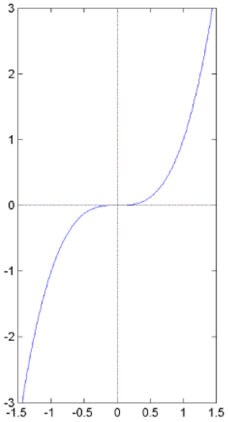
Folgerung 4.7

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar in* (a, b).

- *Ist* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so ist* f *konstant.*
- *Ist* $f'(x) \geq 0$ *(bzw.* $f'(x) \leq 0$*) für alle* $x \in (a, b)$, *so ist* f *monoton wachsend (bzw. fallend).*
- *Ist* $f'(x) > 0$ *(bzw.* $f'(x) < 0$*) für alle* $x \in (a, b)$, *so ist* f *streng monoton wachsend (bzw. fallend)*

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist **streng monoton wachsend,** da aus $x < y$ immer $x^3 < y^3$ folgt.

Versuchen Sie sich an einem Nachweis mittels Folgerung 4.7.



Krümmungsverhalten

Definition 4.8

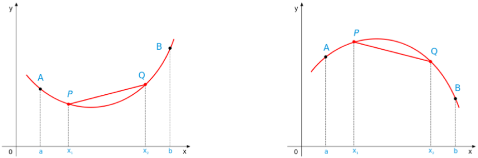
Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex (bzw. konkav) im Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ (\textit{bzw. } f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \end{aligned} \tag{6}$$

gilt.

Veranschaulichung: Die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verläuft in $[x, y]$ **oberhalb (bzw. unterhalb)** des Graphen von f.

Graphische Darstellung:



Konvexität und Differenzierbarkeit

Satz 4.9

Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir für jedes $z \in (a, b)$ die "Tangentenfunktion"

$$t_z : x \mapsto f(z) + f'(z)(x - z).$$

f ist in (a, b) genau dann konvex (bzw. konkav), wenn

$$f(x) \geq t_z(x) \text{ (bzw. } f(x) \leq t_z(x))$$

für alle $z \in (a, b)$ und alle $x \in (a, b)$ gilt.

Veranschaulichung: Jede Tangente an f verläuft **unterhalb (bzw. oberhalb)** des Graphen von f.

Satz 4.10

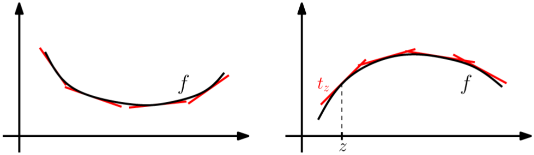
Ist die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, dann ist* f *genau dann konvex (bzw. konkav) in* (a, b), *wenn* f' *in (a,b) monoton wachsend (bzw. fallend) ist.*

Ist f *zweimal differenzierbar, dann ist* f *in* (a, b) *genau dann konvex (bzw. konkav), wenn*

$$f''(x) \geq 0 \ (\textit{bzw. } f''(x) \leq 0)$$

für alle $x \in (a, b)$ *gilt.*

Graphische Darstellung:



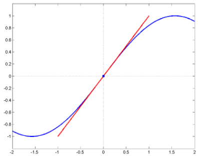
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen $f_1(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = \ln(x)$, $f_4(x) = \cos(x)$ mit Hilfe von dem gegebenen Satz.

Wende- und Sattelpunkte

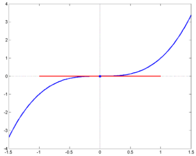
Definition 4.11

Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ *des Graphen, an dem sich das Krümmungsverhalten einer Funktion* f *ändert, heißt* *Wendepunkt* *von* f. *Die Stelle* x_0 *heißt* *Wendestelle.*

Die Tangente in einem Wendepunkt heißt *Wendetangente.* *Einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente nennt man auch* *Sattelpunkt.*



$f(x) = \sin x$ mit Wendepunkt $(0, 0)$



$g(x) = x^3$ mit Sattelpunkt $(0, 0)$

Satz 4.12

Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar und* $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* f, *dann ist* $f''(x_0) = 0$.

Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *dreimal differenzierbar und gilt für ein* $x_0 \in (a, b)$ *sowohl* $f''(x_0) = 0$ *als auch* $f'''(x_0) \neq 0$, *dann ist* $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* f.

Kurvendiskussion

Eine Kurvendiskussion setzt sich aus den folgenden Teilaufgaben zusammen:

- **Definitionsbereich.** Auf welcher (möglichst großen) Menge D ist die Funktion f definiert?
- **Wertebereich.** Welche Werte kann $f(x)$ $(x \in D)$ annehmen?
- **Symmetrie.** Ist f gerade oder ungerade?
- **Nullstellen.** Löse $f(x) = 0$.
- **Extrema.** Bestimme die Lösungen x_E von $f'(x) = 0$.
- **Wendepunkte.** Bestimme die Lösungen x_W von $f''(x) = 0$.
- **Verhalten an Polstellen.** Ist f eine rationale Funktion, bestimme die Pole x_P von f (Nullstellen des Nennerpolynoms) und berechne $\lim\limits_{x \to x_P-} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to x_P+} f(x)$.
- **Verhalten im Unendlichen.** Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
- **Monotoniebereiche.** Untersuche Vorzeichen von $f'(x)$.
- **Krümmungsverhalten.** Untersuche Vorzeichen von $f''(x)$.
- **Graphische Darstellung.**

Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Im vorherigen Kapitel (Abschnitt 3) hatten wir das Bisektionsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Form

$$f(x) = 0 \tag{7}$$

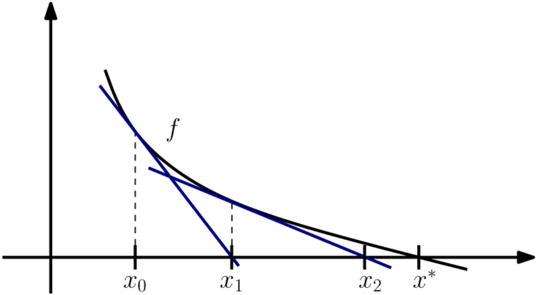
kennengelernt (f soll **stetig** sein).

In diesem Abschnitt wollen wir ein weiteres Verfahren, das so genannte Newton-Verfahren, kennen lernen: Ist f zusätzlich auch **differenzierbar**, so liefert uns das im Folgenden beschriebene, in der Praxis weit verbreitete Verfahren eine schnelle und damit effiziente Methode zur numerischen Bestimmung der Nullstellen von f.

Ziel ist die Bestimmung einer Lösung x^* von (7) – ausgehend von einem Startwert x_0, der möglichst in der Nähe von x^* liegt.

Das Newton-Verfahren

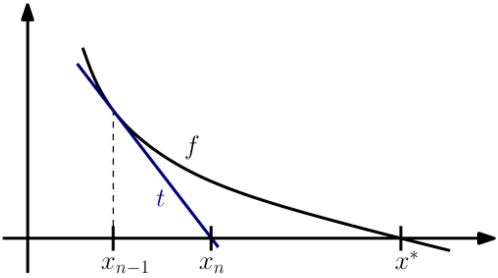
Graphische Darstellung. Idee



Man berechnet im $n-$ten Schritt die Nullstelle x_n der Tangente t auf f in x_{n-1}. Diese wird als neue Näherung für x^* verwendet.

Natürlich wird man zu Beginn einen Startwert x_0 wählen müssen. (???)

Herleitung der Verfahrensvorschrift



Wir stellen die Bedingung

$$t(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Umstellen nach x_n führt auf die Verfahrenvorschrift des Newton-Verfahrens:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

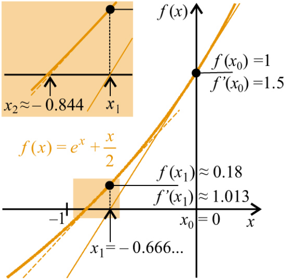
Beispiel

Für das Beispiel $f(x) = e^x + \frac{x}{2}$ liefert (8) die Vorschrift

$$x_n = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{2}}{e^{x_{n-1}} + \frac{1}{2}}.$$

Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ liefert die Berechnung folgende Werte:

n	x_n	$f(x_n)$
1	$-0.666..$	0.18
2	-0.8443	$7.646 \cdot 10^{-3}$
3	-0.8526	$1.449 \cdot 10^{-5}$



Konvergenzeigenschaften

Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann wesentlich schneller als das Bisektionsverfahren (Faustformel: in jedem Schritt Verdopplung der Anzahl korrekter Dezimalstellen).

Voraussetzung für Konvergenz ist aber, dass der Startwert x_0 "genügend nahe" bei x^* liegt ("lokal konvergentes Verfahren").

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dagegen zweimal stetig differenzierbar, d.h. f'' ist stetig, sowie konvex, und besitzt f eine reelle Nullstelle, so konvergiert die Newton-Folge für jeden Startwert x_0 mit $f(x_0) \neq 0$.

- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x + e^x$. Vergleichen Sie die Anzahl der Schritte für das Newton-Verfahren und das Bisektionsverfahren (sehen Sie das Übungstutorium).
- Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \arctan(x)$. Wählen Sie als den Startwert $x_0 = 1.5$ und zeigen Sie, dass das Verfahren divergiert.
- Machen Sie sich die letzten beiden Aussagen an den Beispielen $f(x) = x^2 - 1$ und $f(x) = x^2 e^{-x}$ graphisch klar.

Der Satz von Bernoulli- de l'Hospital

Wenn wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnen möchten, aber sowohl die Zähler- und Nennerfunktion gegen 0 oder ∞ (d.h. "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$") gehen, was erwarten wir dann? Existiert dennoch ein Grenzwert? Wie untersuchen wir dies?

Solche Probleme werden **häufig leichter,** wenn Differenzierbarkeit gegeben ist. Falls f und g aber differenzierbar sind, so stellt der folgende Satz von Bernoulli- de l'Hospital ein verblüffend einfaches Werkzeug zur Verfügung.

Satz 6.1 (Regeln von Bernoulli- de l'Hospital)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen, und für* $x_0 \in (a, b)$ *gelte entweder*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ferner sei $g'(x) \neq 0$ *für alle* x *in einer Umgebung von* x_0 *und*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Plausibilitätsargument zum Satz 6.1

Nahe einer Stelle x_0 mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gilt $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ und $g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$. Damit also

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Beispiele

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = 0,$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(2x-2)}{2x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2\cos(2x-2)}{4x} = \frac{2\cos(0)}{4} = \frac{1}{2}.$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)},$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$ für $\alpha > 0$. Wie kann man aus letzterem einem Aussage über $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}}$ für $\alpha, \beta > 0$ gewinnen?
- $\lim \frac{\sin^2(x)}{x^3}$ und $\lim x^x$.

Bemerkungen

Die Bedeutung der l'Hospitalschen Regeln wird vom Anfänger oft überschätzt und endet in nervenaufreibenden Rechnungen ohne Ergebnis.

Betrachten Sie dazu zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Bemerkungen

Die Bedeutung der l'Hospitalschen Regeln wird vom Anfänger oft überschätzt und endet in nervenaufreibenden Rechnungen ohne Ergebnis.

Betrachten Sie dazu zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \left(= \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 \right).$$

Häufig ist es günstiger, bei der Grenzwertberechnung für unbestimmte Ausdrücke wie "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" auf Potenzreihen zurückgreifen.

Totales Differential und Fehlerfortpflanzung

Wir kommen noch einmal auf die Leibniz-Schreibweise $y'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$ zurück und wollen die Ausdrücke dx und dy näher fassen.

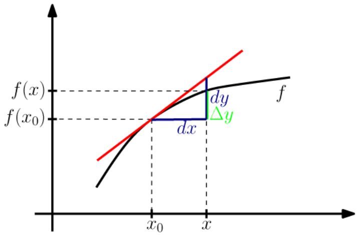
Definition 7.1 (Totales Differential)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine in x_0 differenzierbare Funktion. Für eine beliebige Zahl $dx = x - x_0$ heißt

$$dy := f'(x_0)dx = f'(x_0)(x - x_0)$$

totales Differential von f bei x_0.

Geometrische Bedeutung



dy ist die Änderung der Funktionswerte der **Tangente** bei Änderung des Arguments um dx.

Idee für Fehlerfortpflanzung

Approximiert man f nahe x_0 durch die Tangente, so gilt näherungsweise

$$f(x) - f(x_0) =: \Delta y \approx dy = f'(x_0)dx.$$

Praktische Anwendung

In Experimenten ist häufig der Einfluss des Fehlers Δx einer Messgröße x auf den Fehler Δy einer berechneten Zielgröße $y = f(x)$ von Interesse.

Mit dem totalen Differential und der eben beschriebenen Idee ergibt sich die Näherungsformel

$$|\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x|.$$

Beispiel aus der Thermodynamik

Für ein ideales Gas ist die Entropie

$$S(T, V) = C_V \ln(T) + R \ln(V) + S_0,$$

wobei C_V die Molwärme bei konstantem Volumen ist. Dann ist das totale Differential der Entropie

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \\ &= \frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV. \end{aligned}$$

Der Satz von Taylor

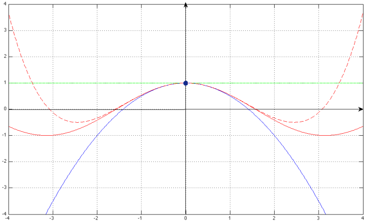
Mir der ersten Ableitung waren wir in der Lage, Funktionen nahe einer Stelle x_0 linear zu approximieren.

Statt linearer Funktionen kann man auch Polynome höherer Ordnung verwenden und damit ggf. noch bessere Ergebnisse erreichen.

Illustration der Idee

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ (rot) lässt sich nahe $x_0 = 0$ durch die Tangente $t(x) = 1$ approximieren (grün).

Besser ist jedoch die Approximation durch $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ (blau) oder durch $T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ (rot).



Satz 8.1 (Satz von Taylor)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf offenen Intervall I $(n+1)-$mal differenzierbare Funktion; $x_0,\ x \in I$. Dann gibt es eine Zahl ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit dem Taylor-Polynom $n-$ter Ordnung

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

und dem Lagrangeschen Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beispiel

Es sei $f(x) = \sin(x)$. Wir wollen die Funktion um die Stelle $x_0 = 0$ approximieren. Die Funktion f ist ersichtlich unendlich oft differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x),\ f^{(4)}(x) = f,\ f^{(5)} = f', \ldots$$

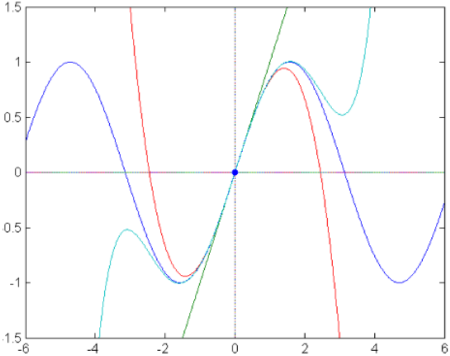
und somit

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = -1,\ f^{(4)}(x_0) = 0, \ldots.$$

Die ersten 6 Taylor-Polynome lauten also

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= 0 + 1(x-0) = x,\\
T_2(x) &= 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = x,\\
T_3(x) &= 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 - \frac{1}{6}(x-0)^3 = x - \frac{1}{6}x^3,\\
T_4(x) &= x - \frac{1}{6}x^3,\\
T_5(x) &= T_6(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.
\end{aligned}$$

Graphische Darstellung



$f(x) = \sin(x)$ (blau) mit den Taylorpolynomen $T_1(x) = T_2(x)$(grün), $T_3(x) = T_4(x)$ (rot) und $T_5(x) = T_6(x)$ (türkis) im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^x$ um die Stelle $x_0 = 0$ und berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2. Schätzen Sie den Fehler mit dem Lagrangeschen Restglied ab.

Taylor-Reihen

Verhält sich das Restglied "gutartig", so approximieren die Taylorpolynome T_n die Funktion f mit größer werdendem n nahe x_0 immer besser.

Im günstigsten Fall lässt sich f in einer Umgebung von x_0 durch eine Taylor-Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Wichtige Taylor-Reihen

$(1-x)^{-1}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\lvert x\rvert < 1$	$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$			

Warnung

Es soll aber vor dem Trugschluss gewarnt werden, der Satz von Taylor garantiere die Entwickelbarkeit **jeder** unendlich oft differenzierbaren Funktion in eine Taylor-Reihe. Vielmehr gilt:

- Es gibt Fälle, in denen die Taylor-Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt nicht konvergiert.
- Es gibt Fälle, in denen die Taylor-Reihe für $x \neq x_0$ konvergiert, aber mit der eigentlichen Funktion f nichts zu tun hat.

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen / Tutorien)

- den Ableitungsbegriff und die Idee der linearen Approximation tiefgreifend verstanden haben,
- Funktionen sicher auf Differenzierbarkeit untersuchen und deren Ableitung mit Diffenzenquotient oder Ableitungsregeln sicher bestimmen können,
- alle Punkte einer Kurvendiskussion sicher ausführen können,
- Taylor-Polynome sicher berechnen können und wissen was man unter einer Taylor-Reihe versteht,
- über Newton-Verfahren und Fehlerfortpflanzung grob Bescheid wissen.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen "nein"? Sie wissen schon...